

# TAMA300 Phase I での差動制御系の設計

安東 正樹

1998.06.05

## 概要

TAMA300 Phase I の差動制御系の設計について述べる。shot-noise level、強度雑音の影響を考慮し、TAMA Phase I での目標感度  $5 \times 10^{-19}$  [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ] を達成できる制御系を設計する。

## 1 差動制御系の概要

図 1 に差動制御系の概要を示す。 $\delta L_-$  は、arm cavity 長の差動変動を表し、重力波の信号を含む。この信号は、dark port の光を検出し、quadrature-phase

で復調することで得ることができる ( $V_{DQ}$ )。 $\delta l_-$  は、beam splitter 変動を表す。この信号は reflection port の光を、quadrature-phase で復調することで得ることができる ( $V_{RQ}$ )。

$\delta L_-$  は、2 つの front mirror に差動で feedback される。この制御帯域は、ゲインを大きく取り、強度雑音の影響を避けるために可能な限り大きく取る。この帯域は鏡の共振によって制限される。

$\delta l_-$  は、beam splitter に feedback される。 $\delta l_-$  信号の shot noise level はそれほど良くないため、この制御帯域を広く取ると、重力波観測周波数帯 (150 Hz ~ 450 Hz) でかえって beam splitter を大きく揺らすことになり、干渉計感度が低下する。従って、 $\delta l_-$  制御帯域は狭くしなければならない。しかし、帯域を狭くすることで、制御で抑え切れない beam splitter の RMS 変動が大きくなり、強度雑音の影響を受けやすくなる。これらの影響を考慮に入れて制御系の設計を行う必要がある。

## 2 干渉計の特性

制御系の設計にあたって必要な干渉計の特性をまとめておく。

### 2.1 鏡の変動

図 2 に干渉計の鏡の変動量を示す [2]。実線は鏡の変動のスペクトルを表し (左の縦軸)、破線はその周波数以上の変動の RMS 振幅を表す (右の縦軸)。この変動量は、地面振動の測定値に、スタックとサスペンションの防振比の測定値を掛け合わせることで求められている。青線は地面の光軸方向 (X 方向) の変動が鏡の光軸方向の変動に伝わる影響を表している。また、赤線は地面の鉛直方向の変動が、鏡の光軸方向への変動に伝わる影響を表す。黒線は、TAMA Phase I での目標変位感度  $5 \times 10^{-19}$  [m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ] を表す。

この図より、地面振動レベルは、観測帯域で目標感度以下に抑えられており、また、RMS で数  $\mu\text{m}$  程度変動していることが分かる。

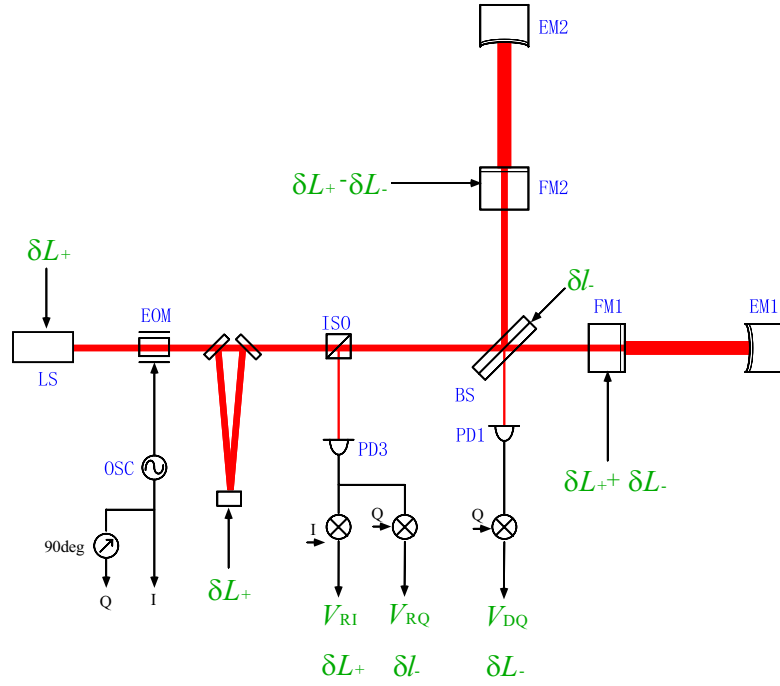


Figure 1: Control system of Fabry-Perot-Michelson interferometer.

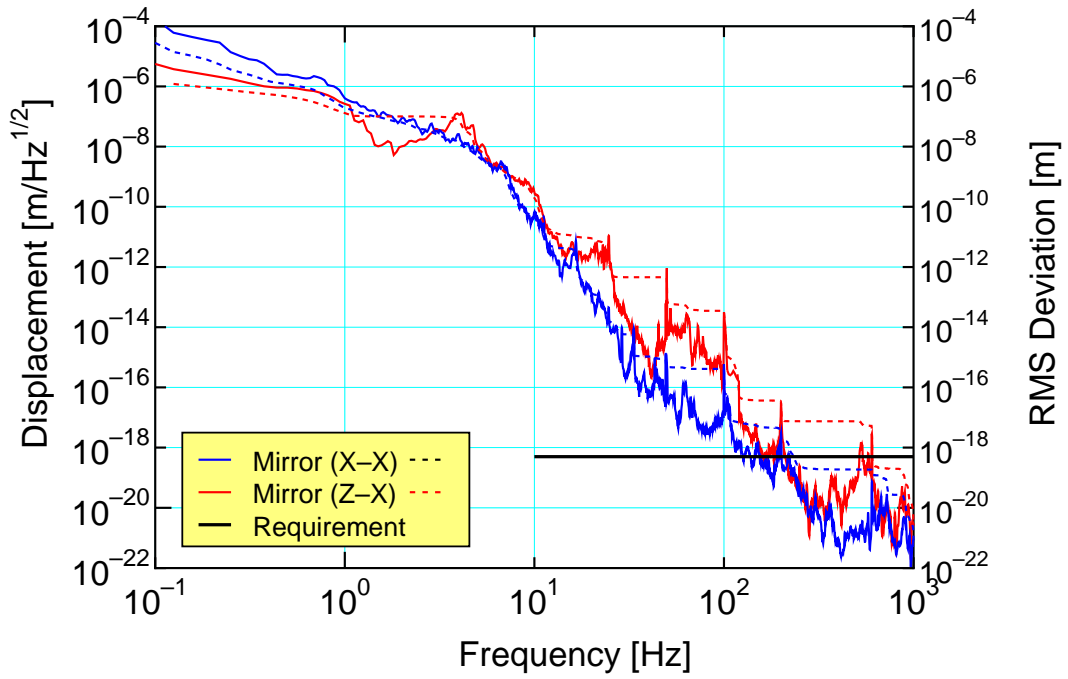


Figure 2: Displacement spectrum of suspended mirrors of TAMA300.

## 2.2 得られる信号の感度

表 1: 干渉計より得られる信号の感度

	$\delta L_-$	$\delta l_-$	Shot-noise level
$V_{DQ}$	1	$3.0 \times 10^{-3}$	$8.5 \times 10^{-20} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}]$
$V_{RI}$	$3.0 \times 10^{-3}$	1	$2.0 \times 10^{-16} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}]$

表 1 に、干渉計から得られる差動変動信号の混入比と shot-noise level を示す。

$V_{DQ}$  信号は  $\delta L_-$  変動に対して敏感であり、 $\delta l_-$  変動に対する感度はその 1/330 である。この信号の  $\delta L_-$  変動に対する shot-noise level は、 $8.5 \times 10^{-20} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}]$  である。また、この shot-noise level は、480 Hz のカットオフ周波数以上では低下していく。

一方、 $V_{RI}$  信号は  $\delta l_-$  変動に対して敏感であり、 $\delta L_-$  変動に対する感度はその 1/330 である。この信号の  $\delta l_-$  変動に対する shot-noise level は、 $2.0 \times 10^{-16} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}]$  である。この信号は周波数応答をほとんど持たない。

## 2.3 光源の強度雑音

干渉計の制御で押さえ切れない鏡の RMS 変動は、光源の強度雑音とカップルして雑音源となる。一般に、強度雑音の影響は、

$$\delta x_{\text{int}} = \frac{\delta P}{P} x_{\text{RMS}} \text{ [m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

で表される。ここで、 $\delta P/P \text{ [1}/\sqrt{\text{Hz}}]$  は光源の強度雑音、 $x_{\text{RMS}} \text{ [m]}$  は残留 RMS 振幅を表す。

TAMA では、光源の強度雑音のスペックは、以下のようにになっている。

$$\text{光源の強度雑音 } (\delta P/P) < 10^{-8} \text{ [1}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

## 2.4 鏡の共振

干渉計の鏡の制御帯域は、鏡の最も低周波数の共振 (基本モード) によって制限される。発振を避けるため、鏡の共振周波数での制御ゲインは、その共振の Q 値以下に設定される。このレポートで用いた値を以下に示す。

共振周波数	30 kHz
Q 値	$10^6$

## 3 差動制御系に対する要求

前節の条件下で、差動制御系に要求される値を表 2 にまとめておく。

表 2: 差動制御系設計に対する要求値。

	制御ゲイン	残留 RMS 振幅
$\delta L_-$	$< 10^{-6}$ (30 kHz)	$< 5.0 \times 10^{-12}$ m
$\delta l_-$	$< 8.4 \times 10^{-2}$ (150 Hz)	$< 2.0 \times 10^{-8}$ m

$\delta L_-$  制御系は残留 RMS 振幅を抑えるためにできるだけ帯域を広く取る。強度雑音の影響が、目標感度に影響を与えないためには、

$$\delta L_{\text{-int}} = \frac{\delta P}{P} L_{\text{-RMS}} < 5.0 \times 10^{-19} \times (\text{Safty factor})$$

から、RMS 振幅に関して

$$L_{\text{-RMS}} < 5.0 \times 10^{-12} \text{ [m]} \quad (1)$$

という条件が課せられる。

また、鏡の共振の影響を避けるため、30 kHz でのゲインは

$$G_{L-,30 \text{ kHz}} < 10^{-6} \quad (2)$$

にしなければならない。

$\delta l_-$  制御に用いる信号の shot-noise level は良くない。この信号を用いて beam splitter を制御することで、beam splitter はかえって大きく揺らされることになる。この影響は、

$$\delta L_{\text{-BScontrol}} = \epsilon_{\text{BS}} \frac{G_{l_-}}{1 + G_{l_-}} \delta l_{\text{-shot}} < 5 \times 10^{-19} \times (\text{Safty factor})$$

で与えられる。ここで、 $\epsilon_{\text{BS}}$  は、 $V_{\text{DQ}}$  信号の  $\delta L_-$  と  $\delta l_-$  に対する感度の比である。TAMA では、この値は、 $\epsilon_{\text{BS}} = 1/330$  である (表 1)。 $G_{l_-}$  は、 $\delta l_-$  制御系のオープンループゲインであり、 $l_{\text{-shot}}$  はその制御に用いる信号の shot noise level である。この式より、 $\delta l_-$  制御系のゲインは、観測帯域で十分小さくしなければならないことが分かる。通常、周波数が低いほど制御ゲインが大きくなるように設計されるため、観測帯域の下端 (150 Hz) での要求が厳しくなる。安全係数を 10 とすると、上式より、150 Hz では、

$$G_{l-,150 \text{ Hz}} < 8.4 \times 10^{-2} \quad (3)$$

であることが要求される。

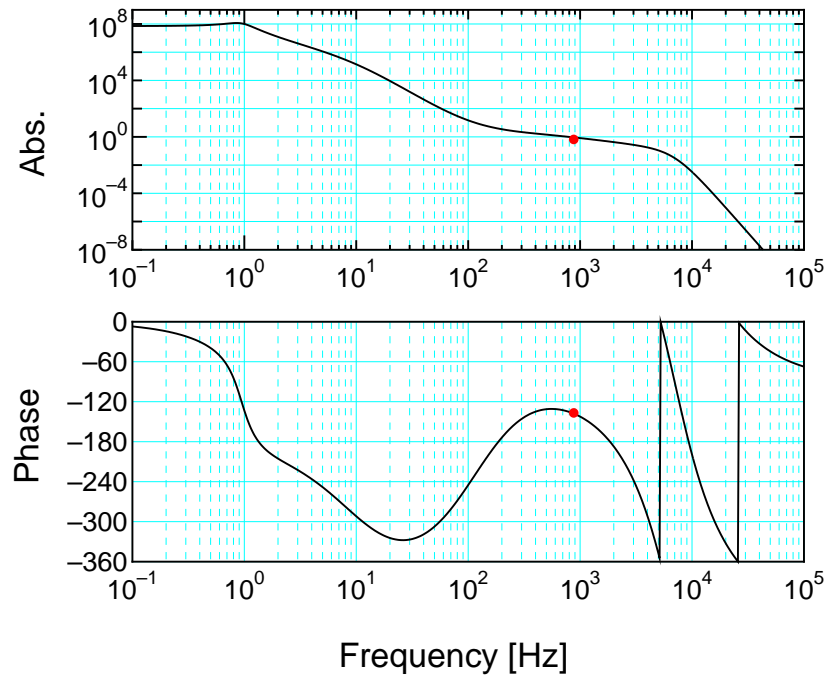
$\delta l_-$  制御系に対しても、制御しきれずに残った残留 RMS 振動のため、強度雑音の影響を受ける。この影響は、 $\delta l_-$  制御信号の shot-noise level 以下であれば良い<sup>1</sup>。

$$\delta l_{\text{-int}} = \frac{\delta P}{P} l_{\text{-RMS}} < 2.0 \times 10^{-16}$$

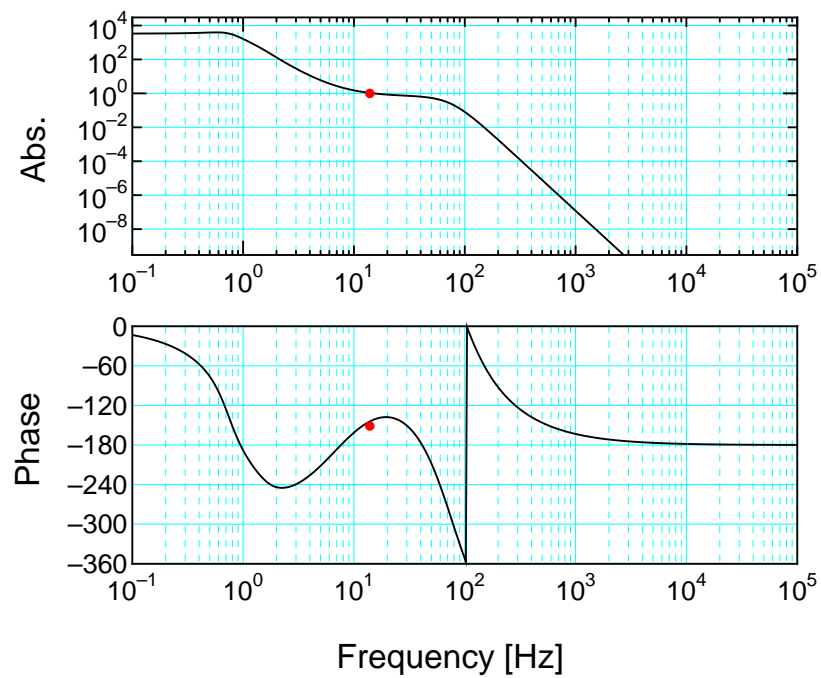
から、RMS 振幅に関して

$$l_{\text{-RMS}} < 2.0 \times 10^{-8} \text{ [m]} \quad (4)$$

という条件が課せられる。 $\delta l_-$  制御信号の shot-noise level の影響を考慮する際に安全係数を入れているため、ここでは、安全係数は入れていない。



⊗ 3: Open loop transfer function of the  $\delta L_-$  control loop.



⊗ 4: Open loop transfer function of the  $\delta l_-$  control loop.

## 4 制御系の設計

これまでの条件を満たすよう設計した差動制御系のオープンループ伝達関数を図3、図4に示す。 $\delta L_-$  制御系の Unity gain frequency は、780 Hz であり、位相余裕は45度である。DC 付近でのゲインは  $7.2 \times 10^7$ 、30 kHz でのゲインは  $2.5 \times 10^{-7}$  である。この制御ループの計算には、フィルターの伝達関数の他に、振り子の伝達関数、 $\delta L_-$  信号のカットオフ、コイルドライバー用マトリックス回路<sup>2</sup>の伝達関数を考慮に入れている。

また、 $\delta l_-$  制御系の Unity gain frequency は、15 Hz であり、位相余裕は39度である。DC 付近でのゲインは  $3.4 \times 10^3$ 、150 Hz でのゲインは  $9.2 \times 10^{-3}$  である。この制御ループの計算には、フィルターの伝達関数と振り子の伝達関数を考慮に入れれば良い。

設計したフィルターの時定数を以下に示す。

	zero	pole	butterworth
$\delta L_-$	120 Hz $\times$ 4	10 Hz $\times$ 2	2-order 7 kHz $\times$ 4
$\delta l_-$	7 Hz $\times$ 4	1 Hz $\times$ 2	2-order 75 Hz $\times$ 3

## 5 残留 RMS 振幅

図5に制御時の鏡の残留変動を示す。赤線は、 $\delta L_-$ 、緑線は、 $\delta l_-$  を表す。これらは、鏡の X-X 変動 (図2) と、それぞれの制御ループのオープンループ伝達関数 (図3、図4) から求めている。このグラフより、 $\delta L_-$  と  $\delta l_-$  の残留 RMS 振幅はいずれも要求値を満たしていることが分かる。

## 6 まとめ

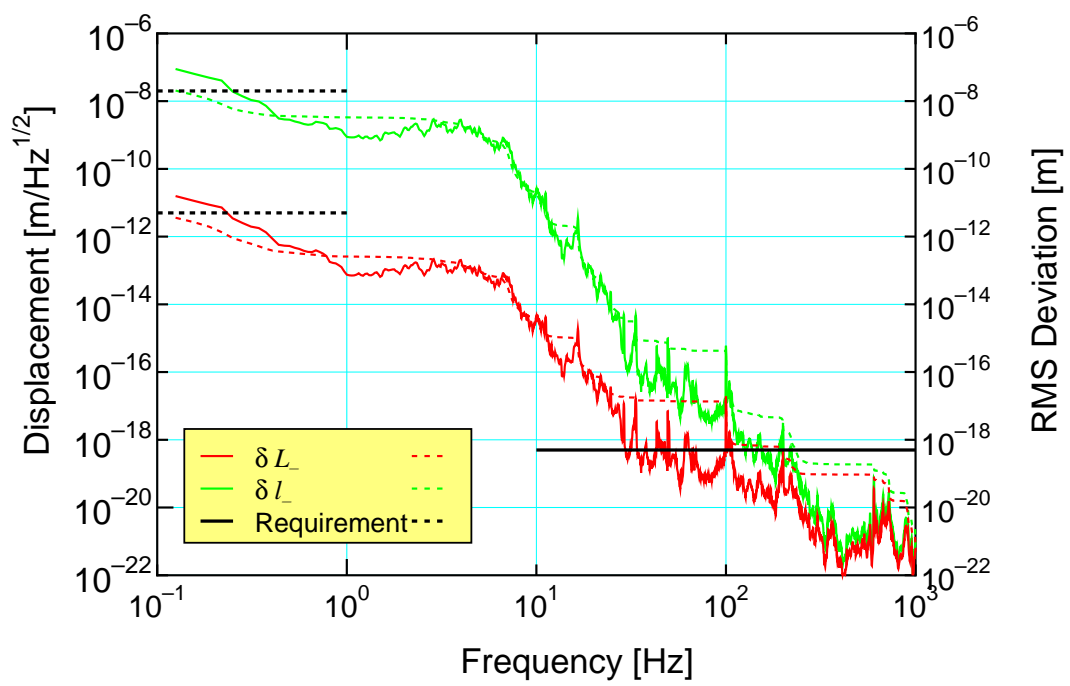
以上、TAMA Phase I の要求を満たす差動制御系の基本設計は、ほぼ完了した。今後は、ここで述べた設計をもとに、実際の回路設計を行う。この際、回路の雑音を考慮する必要がある。

## 参考文献

- [1] 川村 静児, Length meeting 資料.
- [2] 高橋竜太郎, Length meeting 資料, 1998.03.25.
- [3] 安東 正樹, Length meeting 資料, 1998.05.21.

<sup>1</sup>これは十分条件である。 $G_{L-,150 \text{ Hz}}$  が小さければ、shot-noise level を上回っていても問題ない。

<sup>2</sup>10 Hz の LPF と 100 Hz の HPF が組み込まれている。



⊗ 5: Residual motion of differential degrees of freedom.