

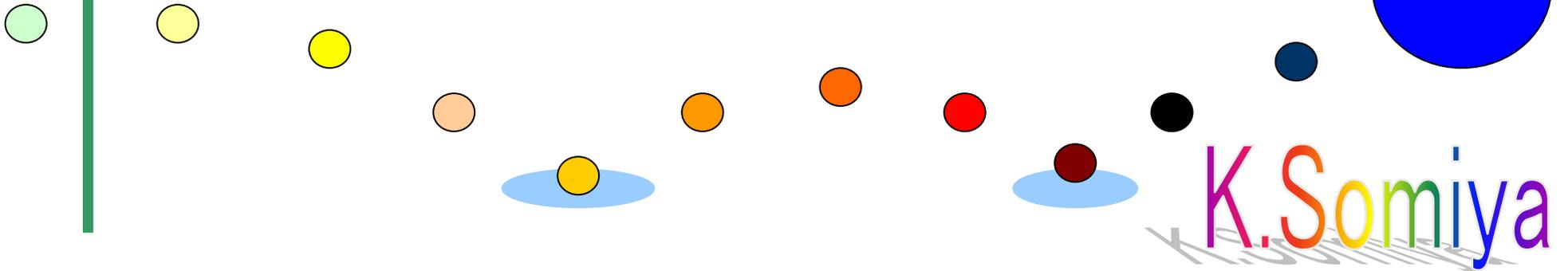
# 熱雑音計算の現状

～第一世代解析計算から第二世代解析計算へ

研究者交流会

April 2009

カリフォルニア工科大 宗宮健太郎  
マックスプランク研究所 山元一広

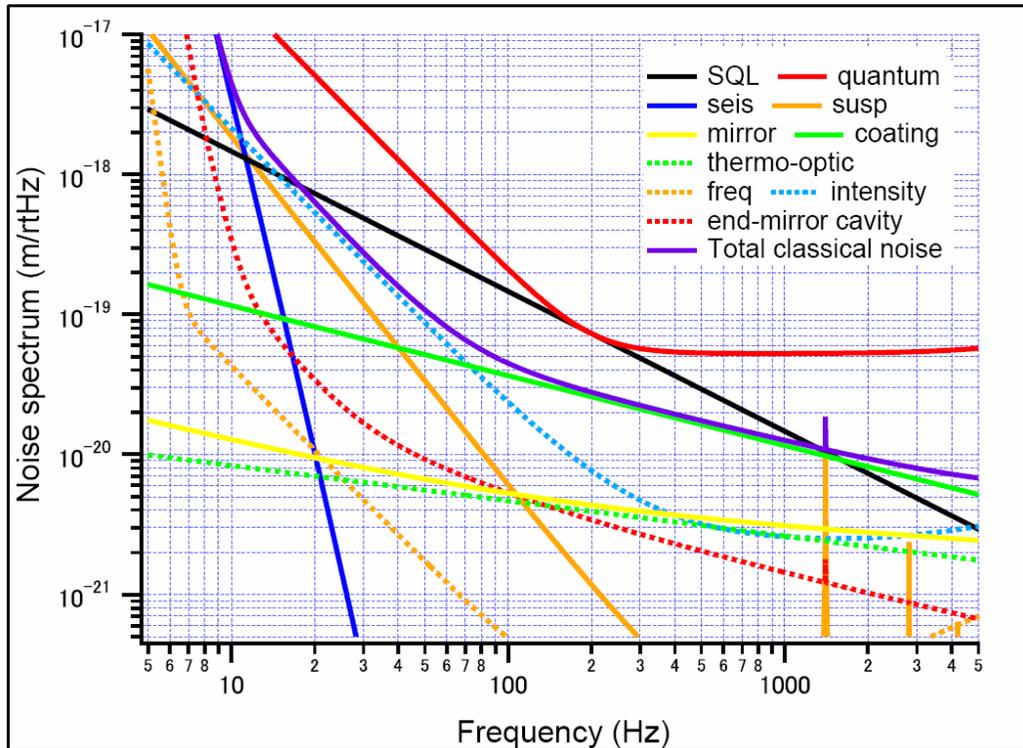


# 目次

- なぜ私が熱雑音の計算をしているか
- 3種類の熱雑音
- これまでに計算されたもの
- 今回我々が計算したもの
- 第二世代熱雑音解析への道

# モチベーション

## ~ Hannover sub-SQL measurement 実験のデザイン



← 常温で古典雑音が  
SQLの4分の1以下

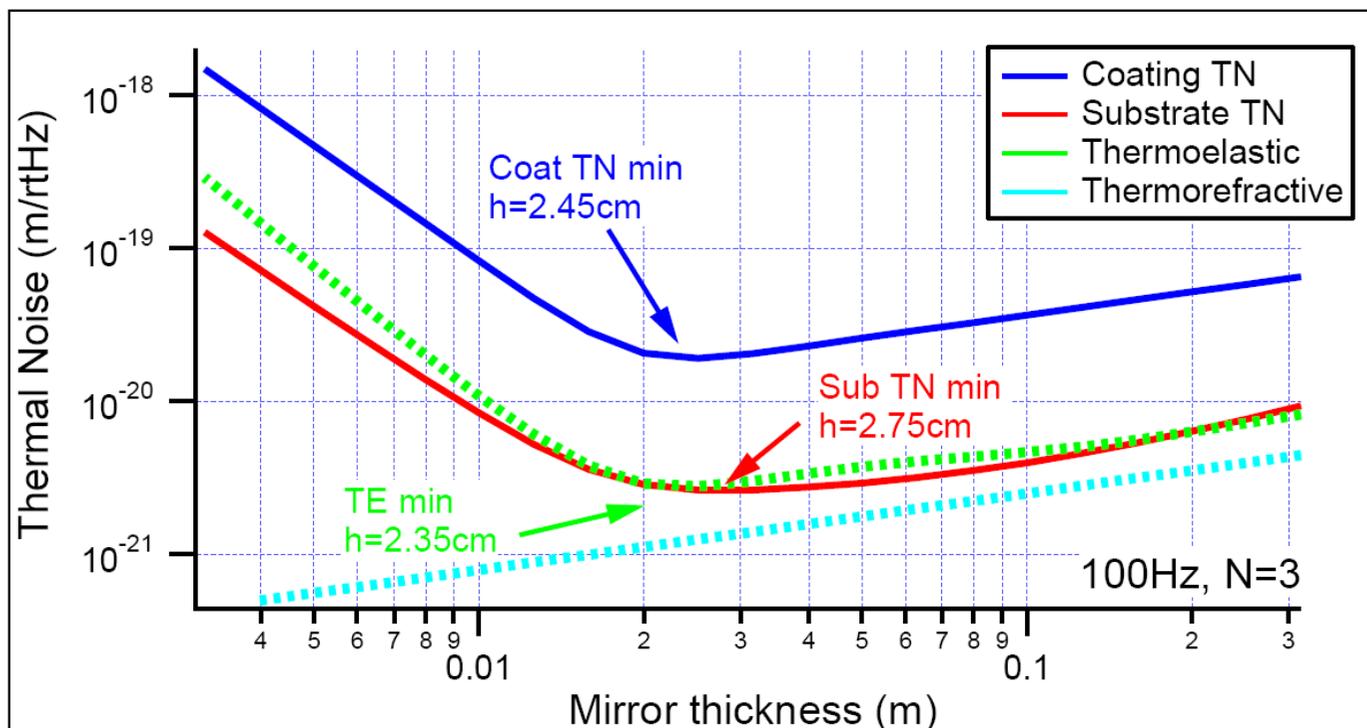
- マスの最適化
- フィネスの最適化
- アーム長の最適化
- 鏡のアスペクト比の最適化

↓

コーティング熱雑音のアスペクト比依存性を計算した例がなかった  
→自分でやることに

# 最適なアスペクト比 (計算結果)

マスは100gに固定、ビーム径はミラー径/2.5に固定



- 鏡を薄くしすぎると熱雑音は増える
- 各熱雑音の最適点はほぼ同じだった ( $a \sim h$ )

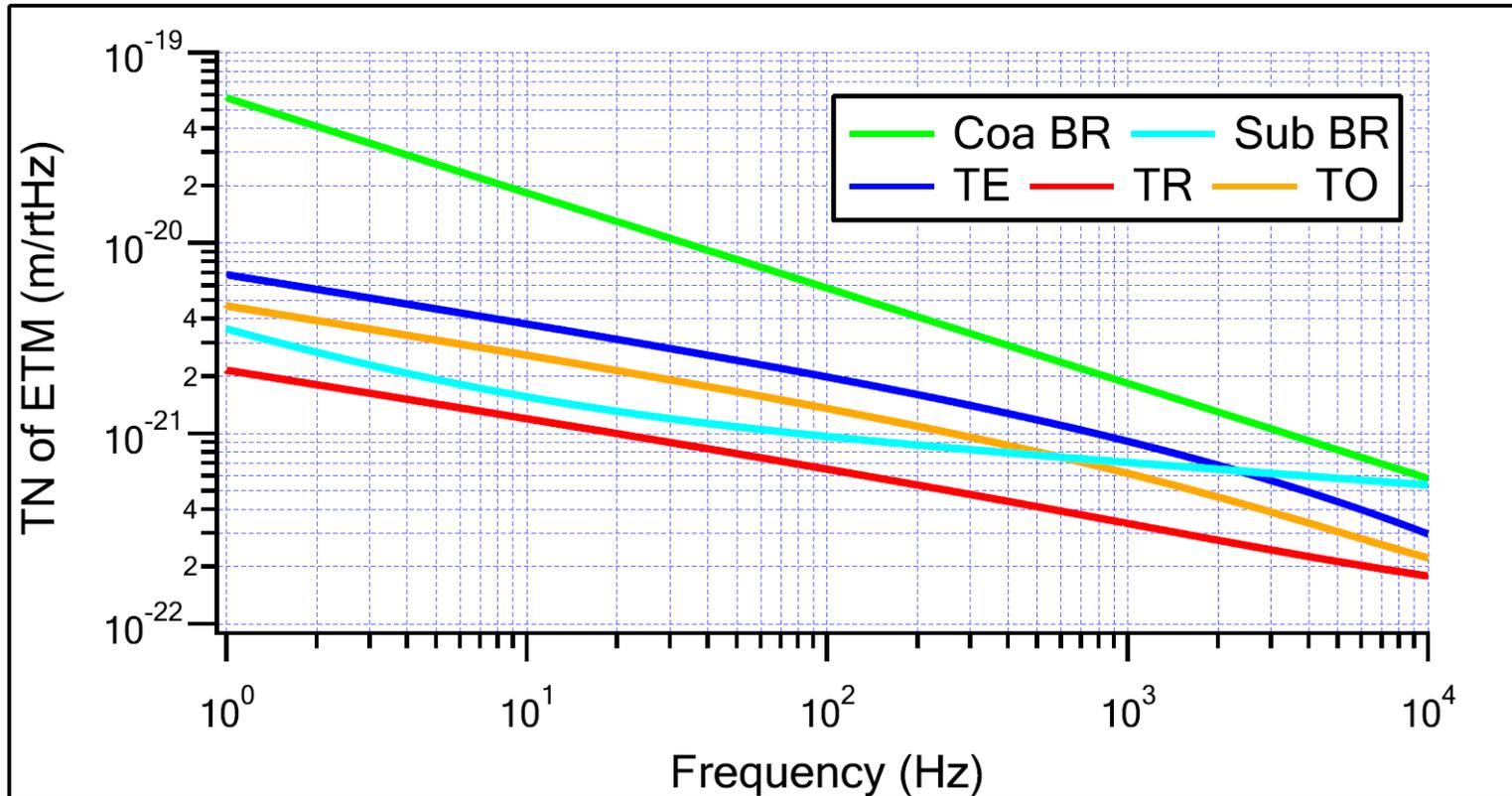
# 論文は意外と好評

- gr-qc 0903.2902
- AdLやAdVにとっては...
  - ブラウニアンは従来モデルより5～6%減
  - 論文提出後にFEMモデルが完成 → 一致
  - Thermo-optic noiseは低周波で顕著な差
- 量子計測やETにとっては...
  - ビーム径を広げるために鏡を薄くしようとしていた  
→ デザインの変更へ

# 熱雑音のレビュー

# いろいろな熱雑音

例: AdLIGOのETM



- 無限大鏡で計算
- BR=Brownian, TE=thermoelastic  
TR=thermorefractive, TO=thermo-optic (=TE+TR)

# 3種類の熱雑音 (BR, TE, TR)

## Brownian熱雑音

→ 温度は一定  
Brown運動で鏡表面が揺れる

## Thermo-optic雑音

→ 温度が揺らぐ ( $\delta T \propto T$ )  
{ (i) 熱膨張率経由で複素反射率が変わる [TE]  
(ii) 屈折率の温度依存性経由で複素反射率が変わる [TR]

温度変化 $\delta T$ はコモンなのでTEとTRはコヒーレントに足す

# 計算方法

## 1. 弾性方程式を解く

- ガウシアンを鏡表面に与える(境界条件)
- Bonduが求めた円筒型鏡の解を用いる
- Harryが求めたコーティング部分の解も用いる

$$E_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad E_{\psi\psi} = \frac{u_r}{r}, \quad E_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$E_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right),$$

円筒の歪テンソル

円筒の弾性方程式  
→解はベッセル関数に

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0,$$

# 計算方法

## 1. 弾性方程式を解く

- ガウシアンを鏡表面に与える(境界条件)
- Bonduが求めた円筒型鏡の解を用いる
- Harryが求めたコーティング部分の解も用いる

## 2. 散逸パワーWを揺動散逸定理(FdT)に代入

$$S_x(\Omega) = \frac{8k_B T W}{\Omega^2 F_0^2} \quad \text{散逸}$$

揺動

$W \sim F_0^2 E_{ij} T_{ij} \phi$  [BR]

# 計算方法

## 1. 弾性方程式を解く

- ガウシアンを鏡表面に与える(境界条件)
- Bonduが求めた円筒型鏡の解を用いる
- Harryが求めたコーティング部分の解も用いる

## 2. 散逸パワーWを揺動散逸定理(FdT)に代入

$$S_x(\Omega) = \frac{8k_B T W}{\Omega^2 F_0^2} \quad \begin{array}{l} \text{散逸} \\ \text{揺動} \end{array} \quad W \sim F_0^2 E_{ij} T_{ij} \phi \quad [\text{BR}]$$

## 3. TOのWは熱伝導方程式から求められる

$$\dot{\theta}_j(z, t) - \kappa_j \nabla^2 \theta(z, t) = q_j(z, t) \quad \begin{array}{l} \text{温度揺らぎ} \\ \text{熱源} \end{array} \quad W \sim (d\theta/dz)^2 \quad [\text{TO}]$$

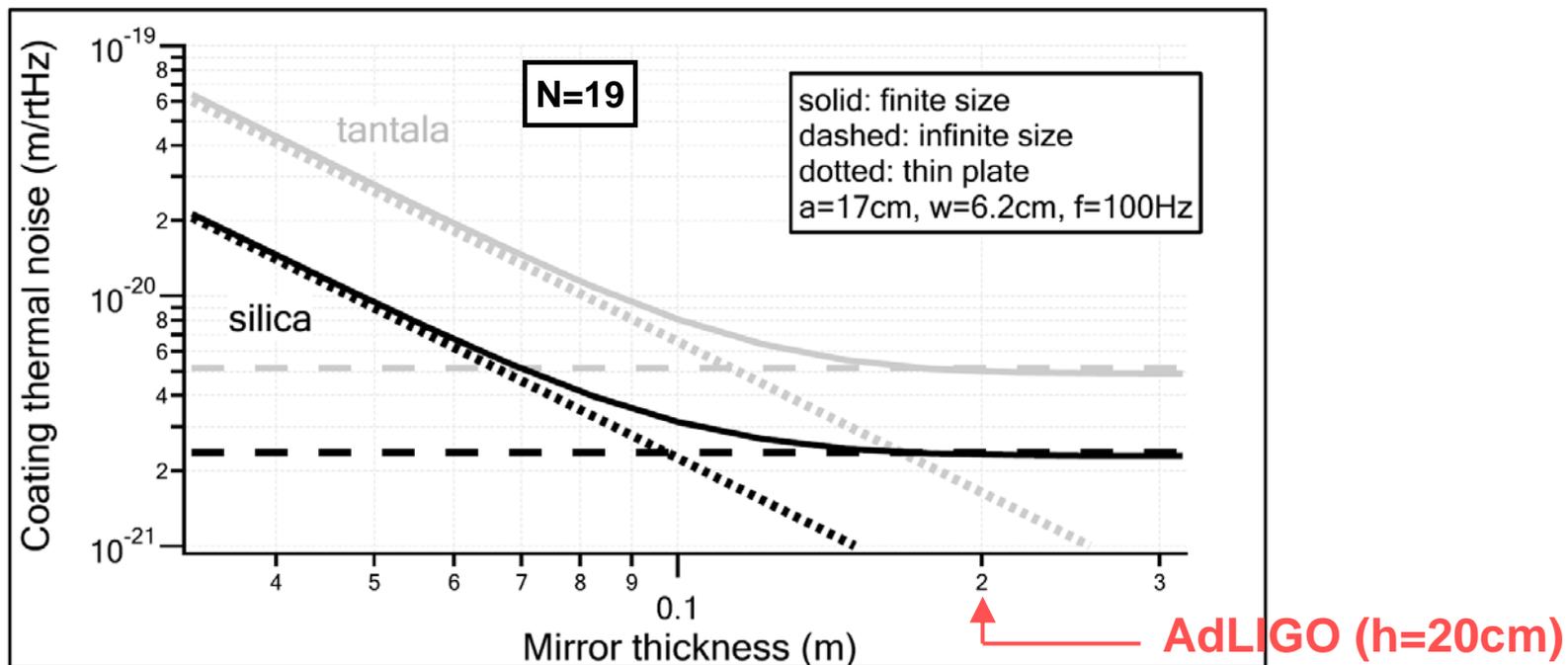
TEとTRでqは異なる

# 熱雑音計算の歴史

- ずっと昔: 揺動散逸定理
- 1980's: Hutchinson's method (モード分解)
- 1995: モード分解でSubstrate熱雑音を計算 (Raab, Bondu)
- 1998: Levin's method (ガウシアンストレスを与える)  
~ 無限大鏡近似
- 1998: Levin's methodで有限鏡のSubstrate熱雑音を計算  
(Bondu)
- 1990's: Coating熱雑音が大きいが判明
- 1999: BraginskyがTE noiseを紹介 ~ 薄膜近似
- 2000: BraginskyがTR noiseを紹介
- 2000: 有限鏡のSubstrate TE noiseを計算 (Liu)
- 2002: 無限大鏡のCoating熱雑音を計算 (Harry)
- 2004: 無限大鏡で厚いCoatingのTE noiseを計算 (Fejer)
- 2007: TR用のLevin's new method (エントロピーを与える)
- 2008: Thermo-optic noise (Evans)
- 2009: 有限鏡で厚いCoatingのBRとTO (宗宮 & 山元)

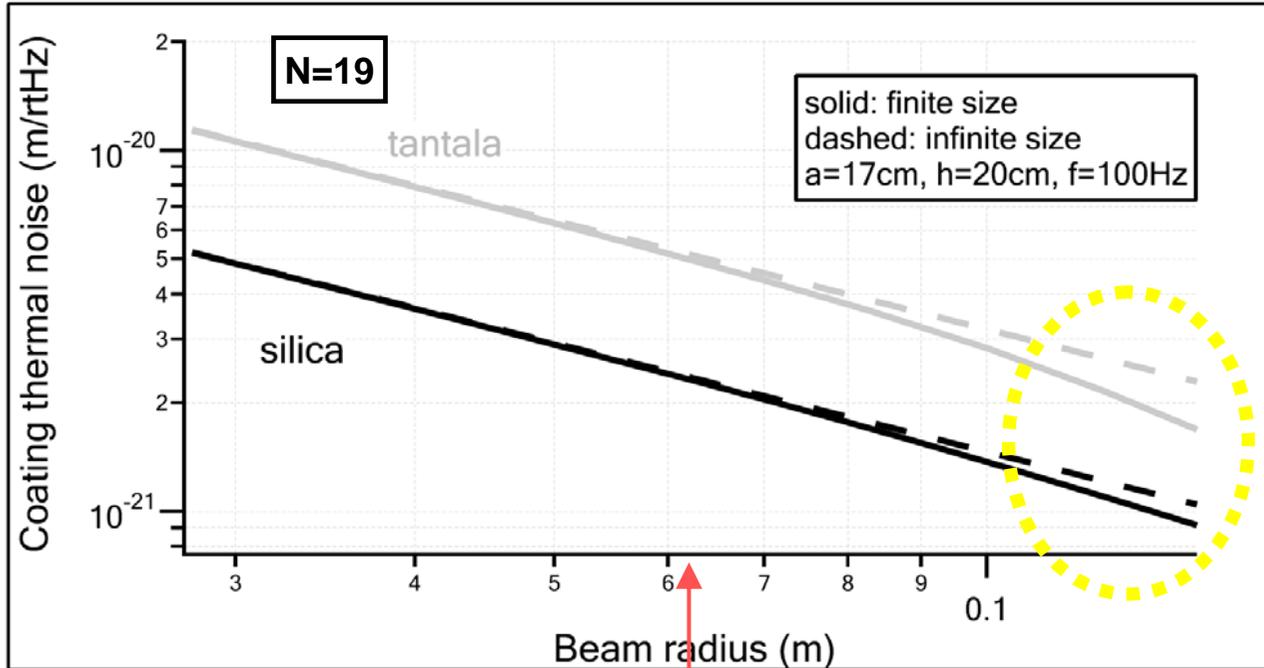
# 計算結果

# Brownian熱雑音 ~アスペクト比依存性



- 厚さが半径より小さいあたりから熱雑音上昇
- AdLIGOにとっては無限大鏡との違いは2.6%(低下)
- 有限要素法の数値計算と一致 (at a=17cm, h=20cm, w=6cm; T0810009-v8)

# Brownian熱雑音 ~ビーム径依存性



ビーム径が鏡の径  
に近いと誤差が出る

AdLIGO (w=6.2cm)

- 鏡が薄くなる→無限<有限
- ビーム径が大きくなる→有限<無限
- 結果的にAdLIGOのETMでは、有限<無限

# 水平方向と垂直方向の損失

LIGO内で2つの微妙に異なるモデルが存在した:

(i) parallel-perpendicular model

(ii) tantala-silica square-sum model

我々の方法は各々のモデルに対応して有限鏡で計算可能

model-(i) infinite  $6.11e-21$  m/rtHz

model-(i) finite  $5.97e-21$  m/rtHz (analytical)

model-(ii) infinite  $5.94e-21$  m/rtHz

model-(ii) finite  $5.79e-21$  m/rtHz (analytical)

$5.73e-21$  m/rtHz (FEM)

どちらが正しいモデルなのだろうか??

# Multi-layer calculation

[See K.Somiya, T0900033v1]

## (i) parallel-perpendicular model

$$\phi_{\parallel}^{\text{app}} = \frac{Y' d_t \phi_t + Y d_s \phi_s}{Y' d_t + Y d_s}$$

$$\phi_{\perp}^{\text{app}} = \frac{Y d_t \phi_t + Y' d_s \phi_s}{Y d_t + Y' d_s}$$

これらは実は近似式  
であることが判明  
(ポワソン比=0)

## (ii) tantala-silica square-sum model

『各レイヤーの熱雑音をいちいち足し合わせる』のと、  
『厚いシリカだけコーティングした場合の熱雑音と  
厚いタンタラだけの熱雑音の自乗和』とは等しいことが判明

# 自乗和するのが正解

(i) parallel-perpendicular model

(ii) tantala-silica square-sum model

model-(i) infinite **6.11e-21 m/rtHz**

model-(i) finite **5.97e-21 m/rtHz (analytical)**

model-(ii) infinite **5.94e-21 m/rtHz**

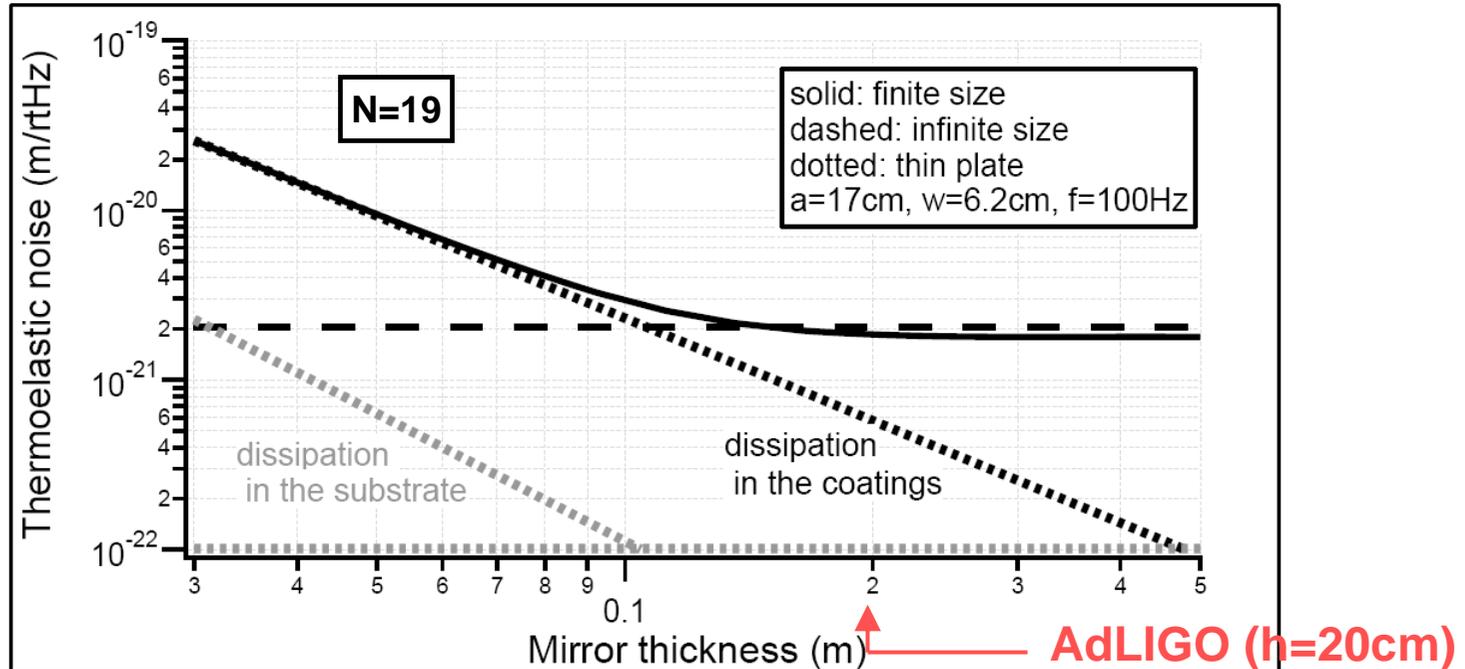
model-(ii) finite **5.79e-21 m/rtHz (analytical)**

**5.73e-21 m/rtHz (FEM)**

**AdLIGO用に使われていた数値とは5-6%の違い**

**ただしPara/perp modelも実際の実験で有用らしい**

# Thermoelastic雑音



- Brownianと同じ感じで、鏡が薄いと雑音レベルが上がる
- CoatingとSubstrateの各々が熱源となる
- 散逸はSubstrateで生じる→コヒーレントに足す必要性

# Fejer (2004) との違い

熱伝導方程式

$$i\Omega\theta_j - \kappa_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta_j = -i\Omega \frac{\alpha_j Y_j T}{C_j (1 - 2\nu_j)} \Theta_j$$

温度揺らぎ  
熱伝導率/比熱

熱膨張率  
ヤング率  
温度

比熱  
ポワソン比

↑  
膨張 (TEの熱源)

Fejer (2004) : 膨張にz依存性を入れなかった

→ Coating熱弾性雑音のみ

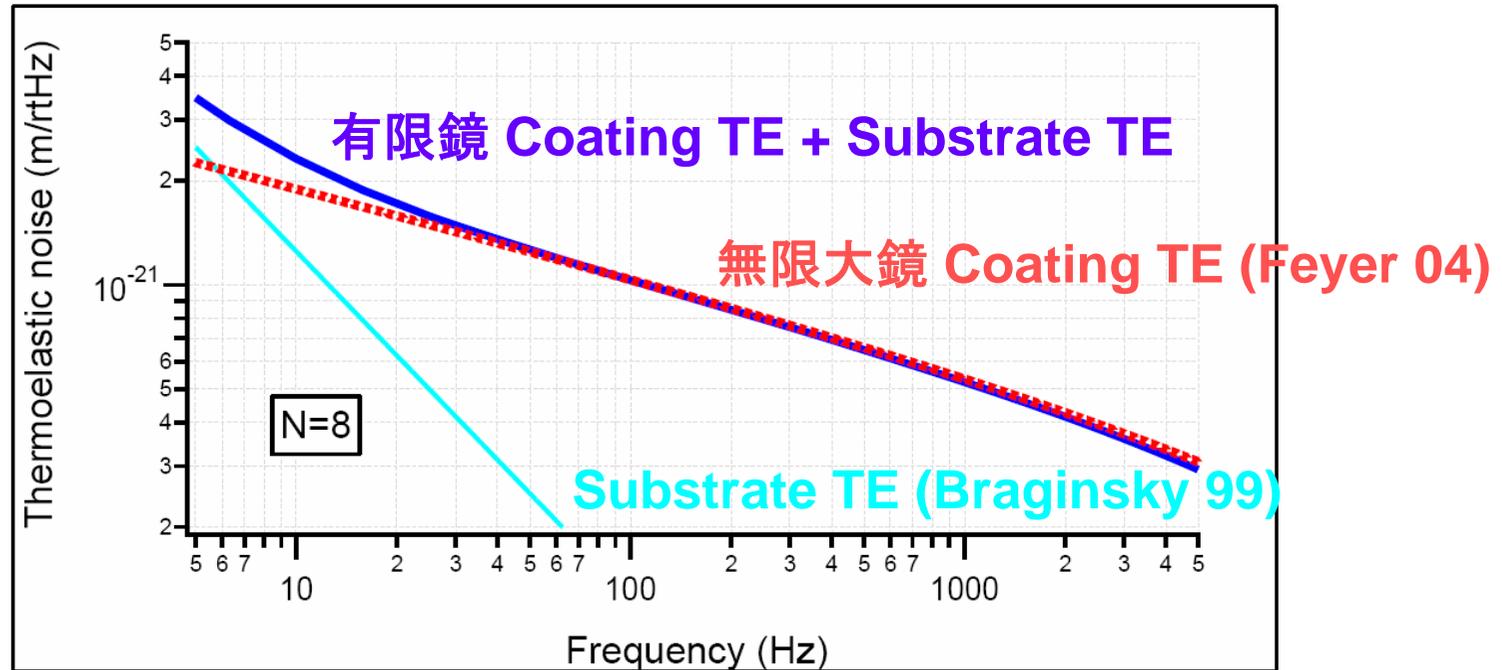
我々の計算 : Substrate内の膨張にz依存性を導入

→ Substrate熱弾性雑音がコヒーレントに加わる

この違いは、(1)周波数が低いほど、(2)鏡が薄いほど、  
(3)コーティングが薄いほど、顕著に現れる

# Thermoelastic雑音 (スペクトル)

AdLIGO ITM



- AdLIGOでもITMで低周波だと影響が出てくる
- Sub TEとCoa TEの単純な自乗和より大きい

# Th.elastic + Th.refractive = Thermo-optic

TEの熱伝導方程式

$$i\Omega\theta_j - \kappa_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta_j = -i\Omega \frac{\alpha_j Y_j T}{C_j (1 - 2\nu_j)} \Theta_j$$

温度揺らぎ  
熱伝導率/比熱

熱膨張率  
ヤング率  
温度

比熱  
ポワソン比

膨張 (TEの熱源)

TRの熱伝導方程式

$$i\Omega\theta_c - \kappa_c \frac{\partial^2}{\partial z^2} \theta_c = -i\Omega \frac{\beta_{\text{eff}} \tilde{\lambda} T F_0}{C_c} \cdot \frac{e^{-z/\ell}}{\ell} p(r)$$

屈折率の温度依存性 (TRの熱源)

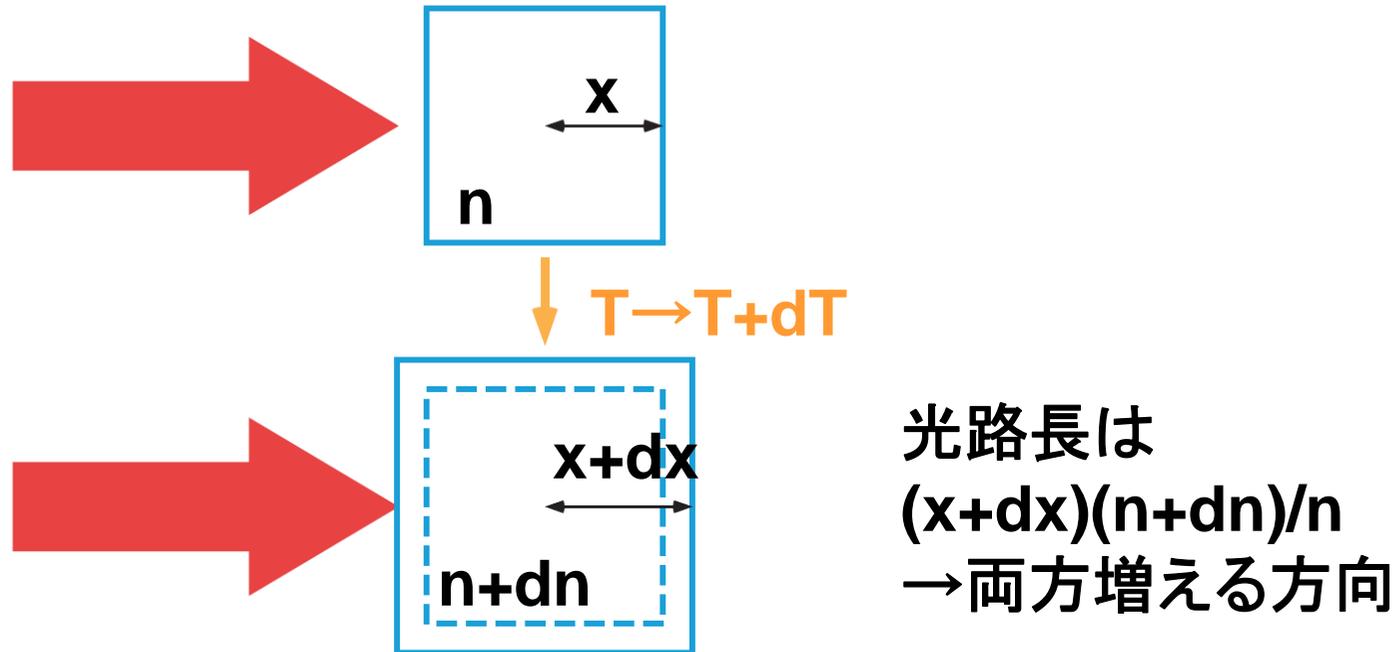
波長 “仮想力”  
デルタ関数

ガウス分布

右辺を足して $\theta$ を求め、散逸を計算するとTO雑音が求まる

# 増えるのか減るのか

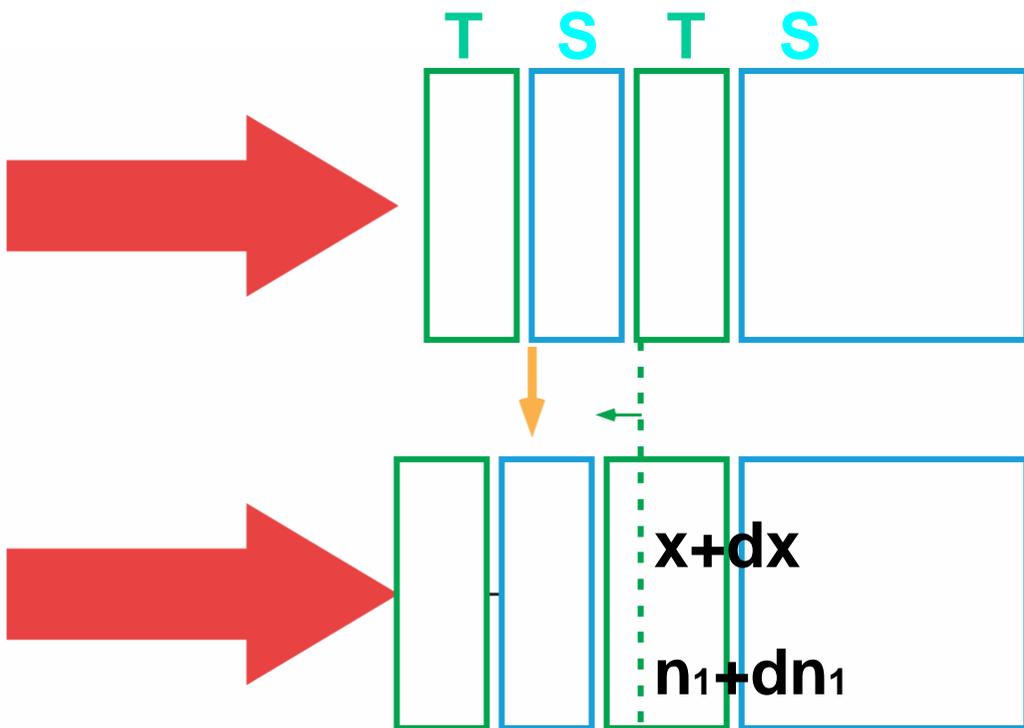
$\alpha$  ( $dV/dT$ )も  $\beta$  ( $dn/dT$ )も正である



Substrate内ではTEとTRは足しあう  
(しかしこれはいま関係ない)

# 増えるのか減るのか

[Evans 2008]

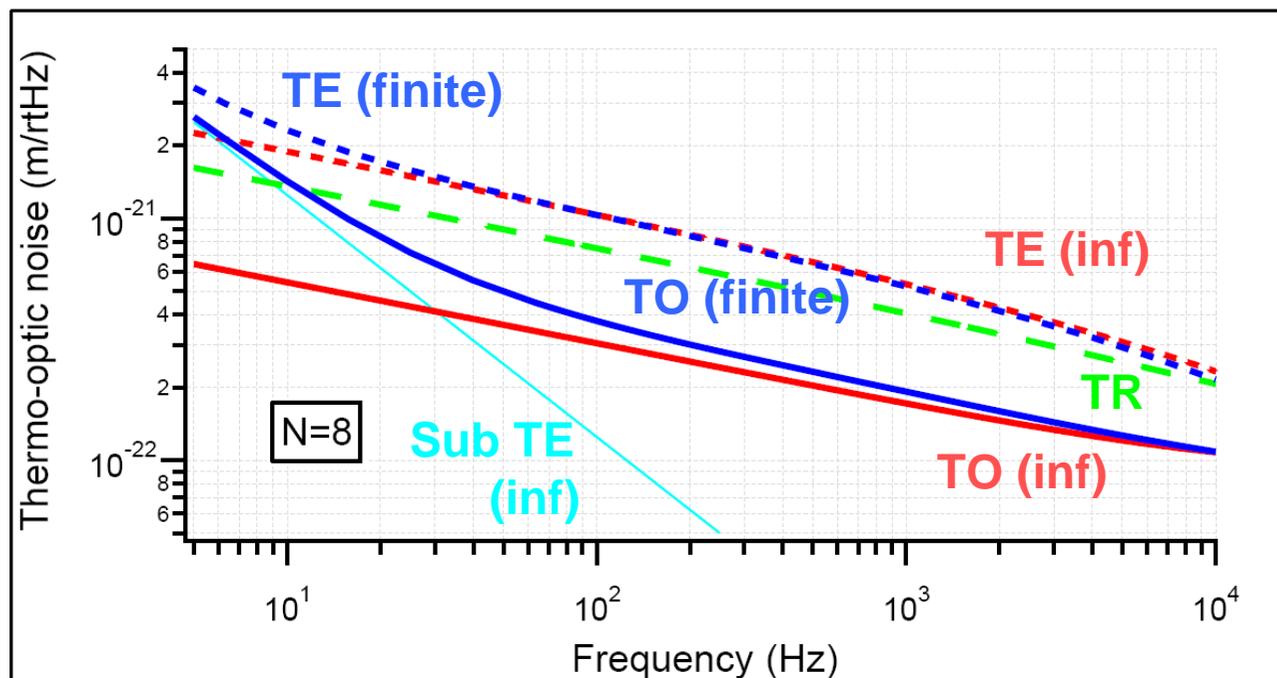


- 雑音となる2つのパス  
(1) メカニカルに押す  
~TE雑音だけ  
(2) 複素反射率を変える  
~TEもTRも影響する
- 広い意味で、(1)をTE雑音、  
(2)をTR雑音と呼んでいる
- (1)と(2)は符号が異なる

Coating表面ではTEとTRは打ち消しあう

# Thermo-optic雑音 (スペクトル)

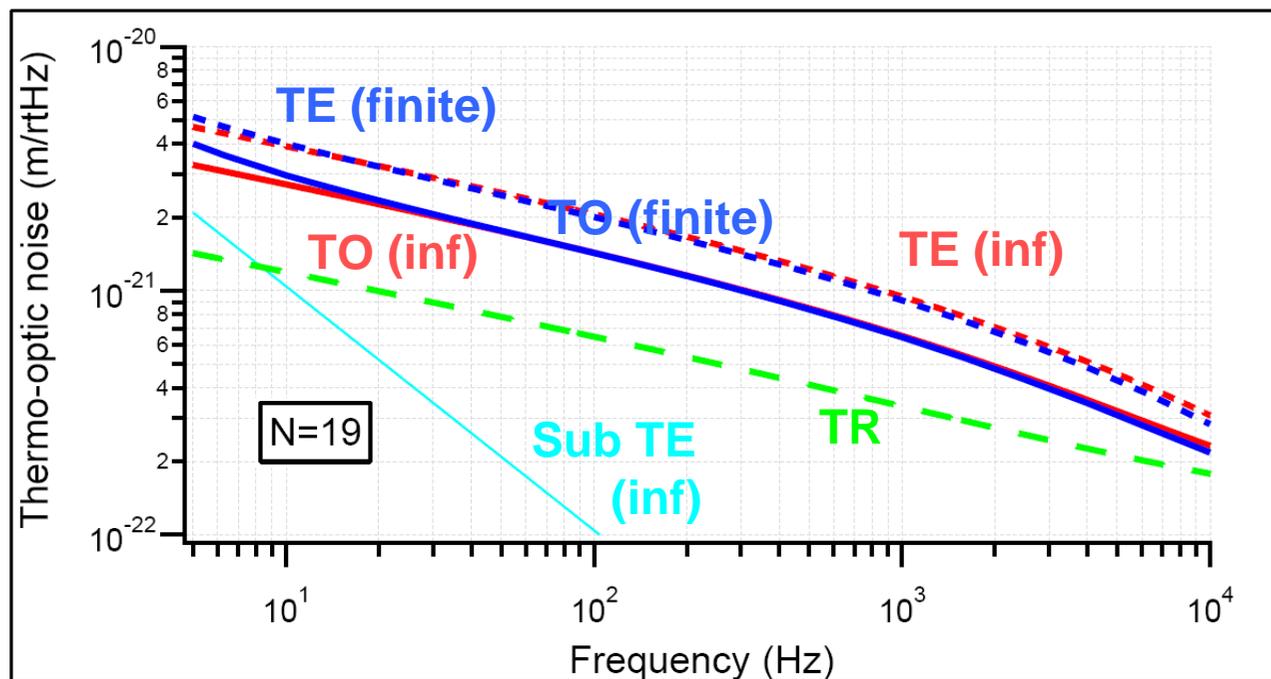
AdLIGO ITM



- Thermorefractive雑音は無限大鏡と同じ
- ITMだと低周波で違いが出る

# Thermo-optic雑音 (スペクトル)

AdLIGO ETM

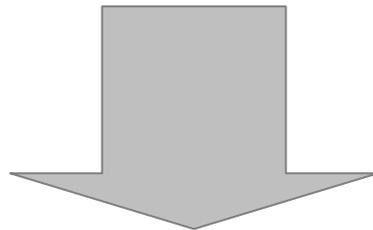


有限大と無限大の違いはほとんどない

# 有限大鏡の熱雑音のまとめ

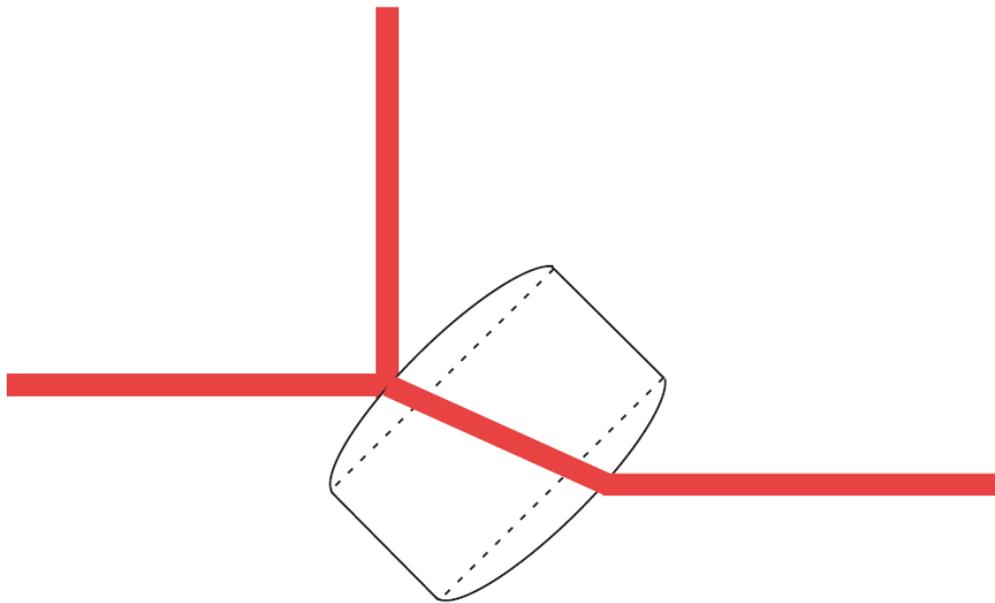
- 鏡が薄いとBrownianとThermoelasticが大きくなる
- AdLIGOでは有限と無限大の違いは2.6%
- これまで使われていたPara/perp modelとは5.5%違う
- Coating TE雑音とSubstrate TE雑音のコヒーレント和を計算
- TE雑音(→TO雑音)は低周波で従来と異なる結果

- *第一世代解析計算のおまけ*
- *第二世代解析計算への道*



# おまけ その1 ~ GEOのBS透過雑音

[LIGO-DCC T0900145v1]



**GEOのBS**

BSを透過する光にとって、  
Brown運動によるBSの膨張は  
真空とシリカの屈折率の差を  
介して雑音になる

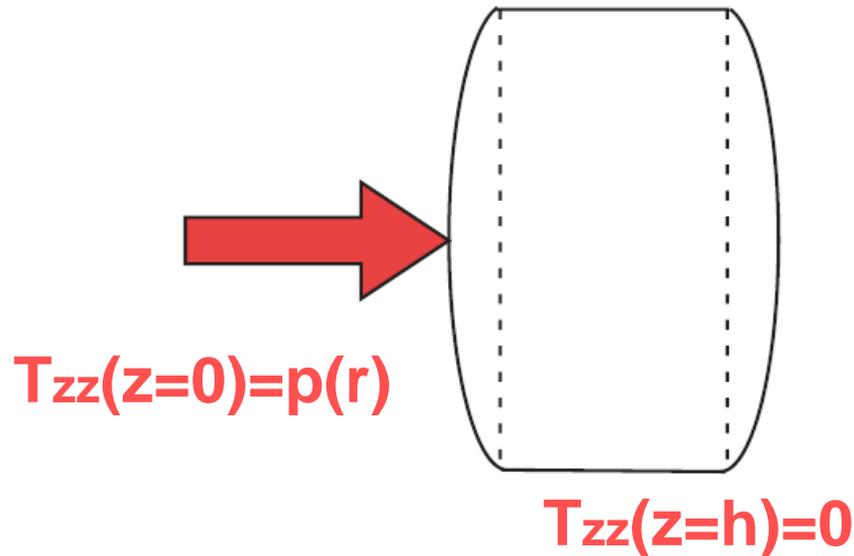
どうやって求めるか

# おまけ その1 ~ GEOのBS透過雑音

[LIGO-DCC T0900145v1]

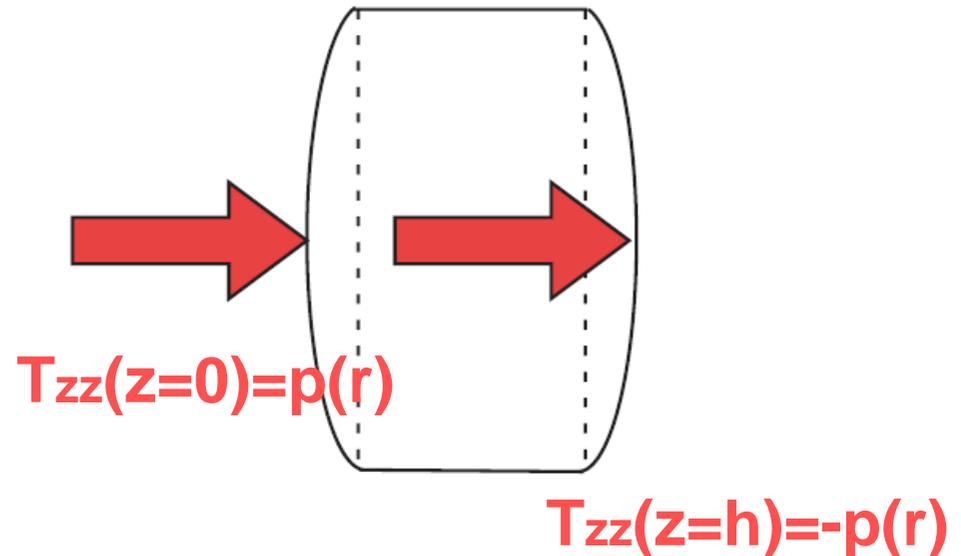
通常（反射光の雑音）

反射面に仮想力



BS（透過光の雑音）

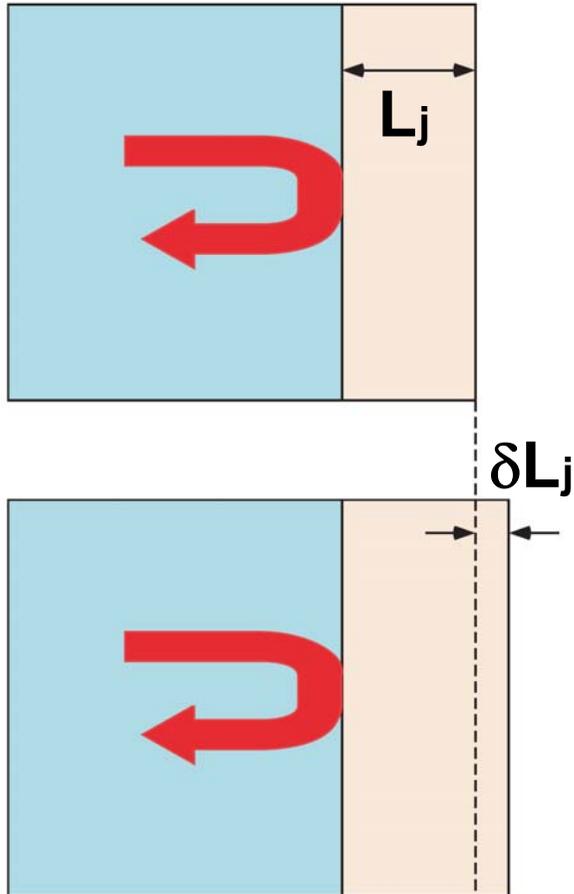
両側に差動に仮想力



ちなみに、大して大きくありませんでした ( $7.7e-21[1/\text{rtHz}]@100\text{Hz}$ )

# おまけ その2 ~ 裏側コーティング

[Yanbei Chen's note]



1次元で考えると、鏡をひっくり返すだけでコーティング熱雑音が消えるように思える



3次元の有限鏡で計算:7%しか改善せず



実は横にひっぱられる効果の方が支配的

## 第二世代熱雜音解析

# 発端はKimbleの論文

PRL **101**, 260602 (2008)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending  
31 DECEMBER 2008

## Optical Interferometers with Reduced Sensitivity to Thermal Noise

H. J. Kimble,<sup>\*</sup> Benjamin L. Lev,<sup>†</sup> and Jun Ye

*JILA, National Institute of Standards and Technology and University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0440, USA*

(Received 20 June 2008; published 30 December 2008)

A fundamental limit to the sensitivity of optical interferometry is thermal noise that drives fluctuations in the positions of the surfaces of the interferometer's mirrors, and thereby in the phase of the intracavity field. Schemes for reducing this thermally driven phase noise are presented that rely upon the coherent character of the underlying displacements and strains. Although the position of the physical surface fluctuates, the optical phase upon reflection can have reduced sensitivity to this motion. While practical implementation of such schemes for coherent compensation face certain challenges, we hope to stimulate further work on this important thermal noise problem.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.260602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.260602)

PACS numbers: 07.60.Ly, 04.80.Nn, 05.40.Ca, 42.62.Eh

**Brownian熱雑音キャンセレーションの先駆けと言われている**

## 第二世代熱雑音解析のポイントは2つ

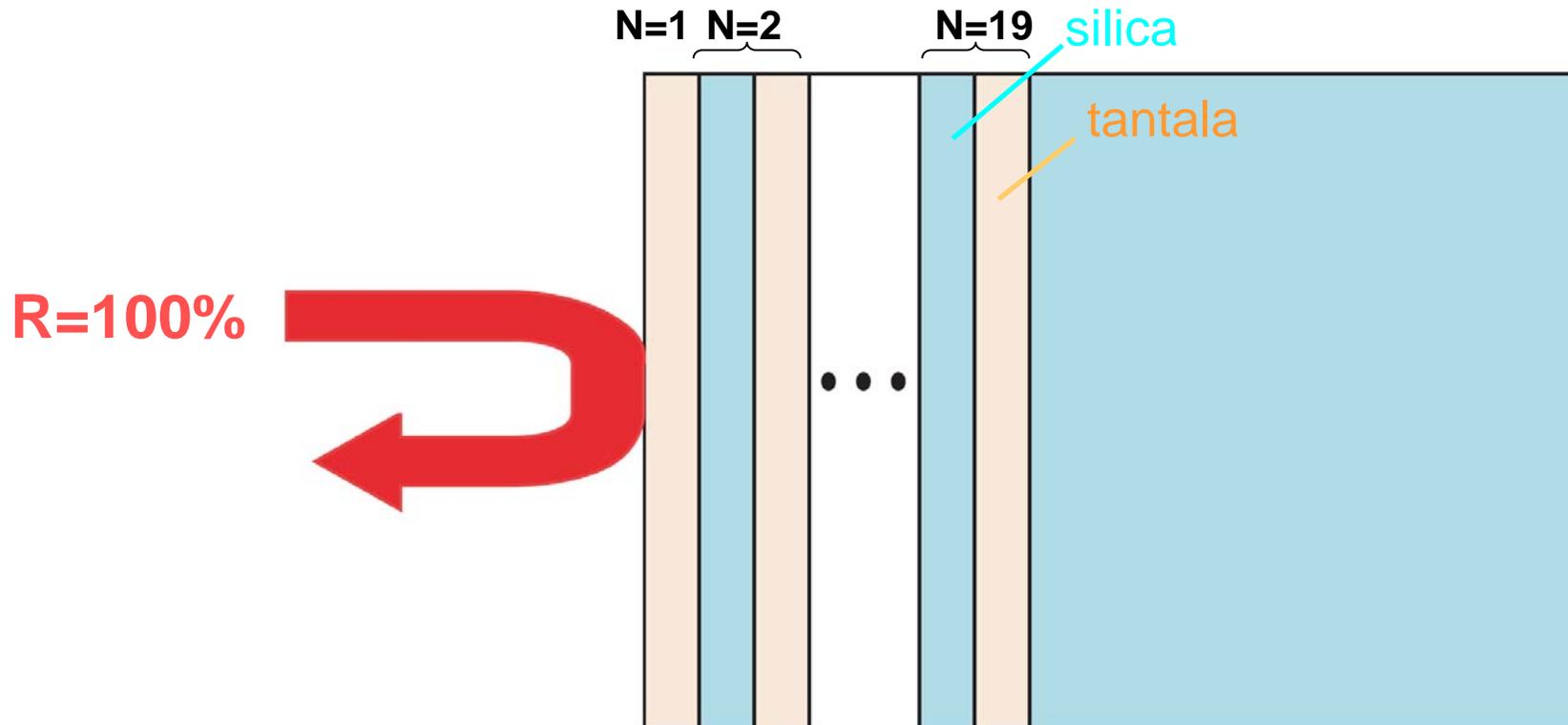
- (1) 鏡のさまざまな点に仮想力を加える
- (2) 歪みと応力、温度とエントロピー、だけではなく複数の共役ペアを考える



より正確な熱雑音の見積もり

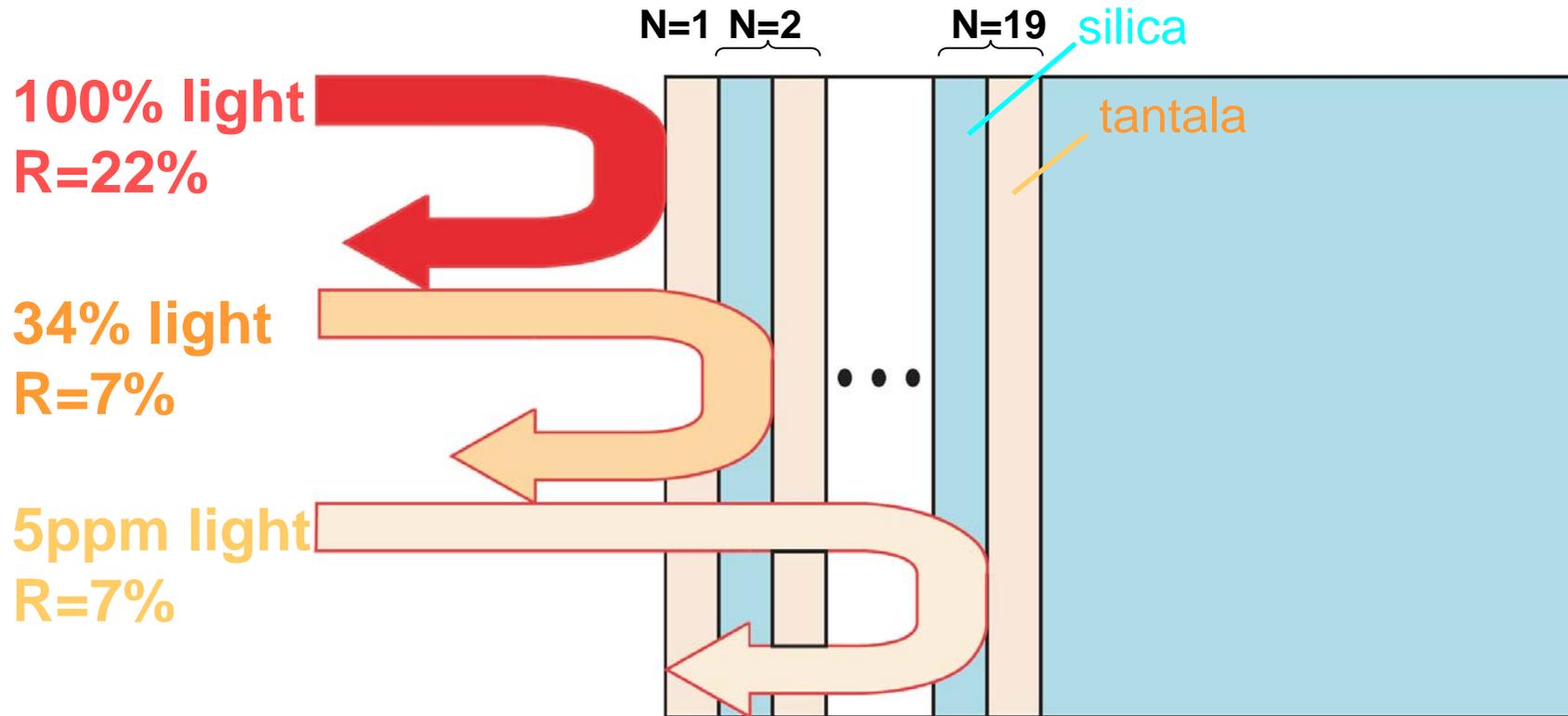
雑音を相殺させるコーティングデザイン

# 現在のモデル：単層膜近似



- 光は最初の膜で全反射する
- TR雑音に関しては実効的な反射率変化がまとめてデルタ関数的に加えられる

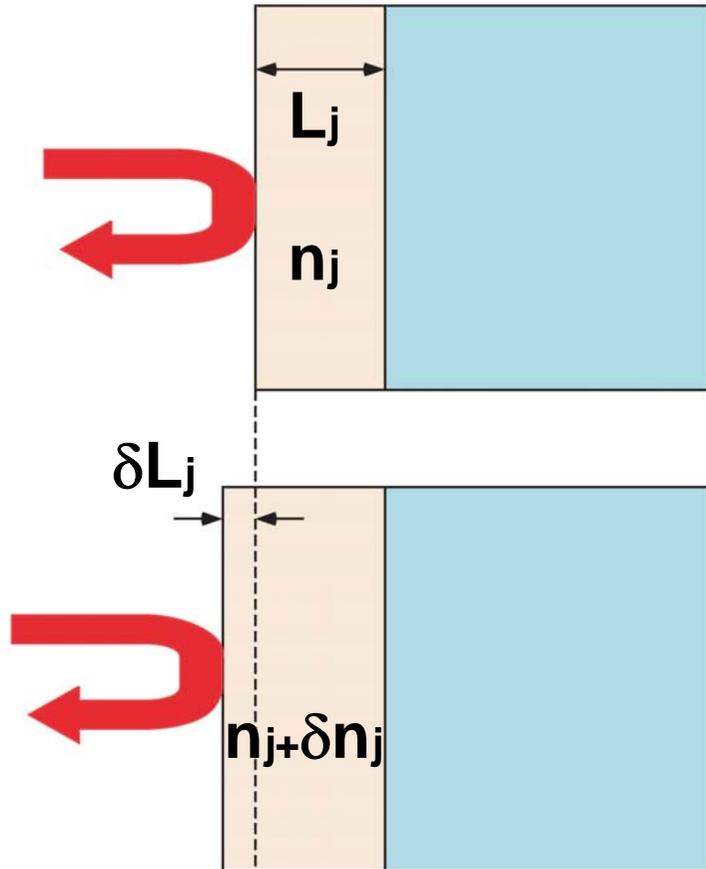
# もっと正確なモデル



- 一部の光はコーティングを透過する
- 境界条件が増える

# Brownian雑音キャンセレーション

[Y.Chen 2008]



$$BR = n_j \delta L_j + L_j \delta n_j$$

$\delta n$ と $\delta L$ とに相関はあるのか?

“*Clausius-Mossotti relation*”

↓ for silica...

$$(d \log n / dv)_{n_1} = -0.28, \quad (d \log n / dv)_{n_2} = -0.64$$

- z方向のみのキャンセレーション
- Yanbei Chenの学生が計算中

# 全部を計算する

Brownian熱雑音：温度を固定、力を加え、体積変化を見る

Thermo-optic雑音：力を固定、エントロピーを加え、温度変化を見る

これらのクロスタームは存在するのか  
(力とエントロピーを両方正しく加えられるか)



蓑さんが計算中

$\alpha$  と  $\beta$  の温度依存性：Thermo-optic雑音の見積もりに必須

$\alpha$  と  $\beta$  の圧力依存性、体積依存性、etc.



いろいろな実験が必要

# まとめ

- 現在用いられている鏡の熱雑音解析はこれでほぼ完了か
- 量子計測実験、ETデザインに有用
- GEOのBS雑音の解析など
- 第二世代解析を開発中; Brownian熱雑音の低減へ
- 実用化のためにはいくつかのパラメタの測定が必要