



TAMA300におけるウェーブレットによる バースト重力波の探索方法

Wavelet-based Time-Frequency clustering method to search for
gravitational wave bursts in TAMA300 data

重力波実験物理学

山岸 彰伍 (M07SA025)



はじめに

- 重力波とは光速で伝わる時空のゆがみ。
 - 重力の相互作用は非常に弱いので未だに直接検出されていない。
 - 直接検出されれば・・・
 - 一般相対性理論の検証
 - 星の内部の情報が得られる
 - ブラックホール形成の物理
- ⇒ 電波観測とは異なる
重力波天文学のはじまり
- 検出のために世界各地で大型検出器が稼働、建設されている。宇宙も舞台になりつつある。

目次



1. 重力波

2. 重力波検出器 TAMA300

3. ウェーブレット変換

4. TF (time-frequency) クラスタリング

5. イベント選別

6. まとめ



1.重力波

重力波とは

一般相対性理論においてEinstein方程式を摂動近似して解くことで得られる波動解

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$g_{\mu,\nu} = \eta_{\mu,\nu} + h_{\mu,\nu}$
 $|h_{\mu,\nu}| \ll 1$
 TT gauge . . .

➔

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (T_{\mu\nu} = 0)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)}$$

光速で伝播する時空間の歪み

重力波源

- 中性子星(ブラックホール)連星
- ブラックホール準固有振動

- (II型)超新星爆発 ← **本研究のtarget**
- パルサー
- etc...



1.重力波

重力波が質点に及ぼす影響

固有距離 ξ の変化

測地線偏差の方程式

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^i = R^i_{\mu\nu j} U^\mu U^\nu \xi^j$$

$$U^\mu \simeq (1, 0, 0, 0)$$

$$\tau \simeq ct$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^i = -R^i_{0j0} \xi^j$$

$$R^i_{0j0} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}^i_j}{\partial t^2}$$

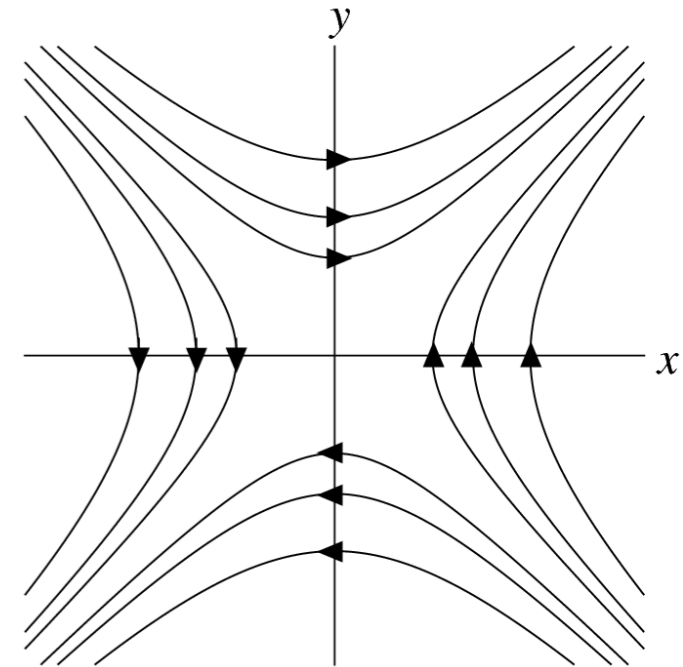
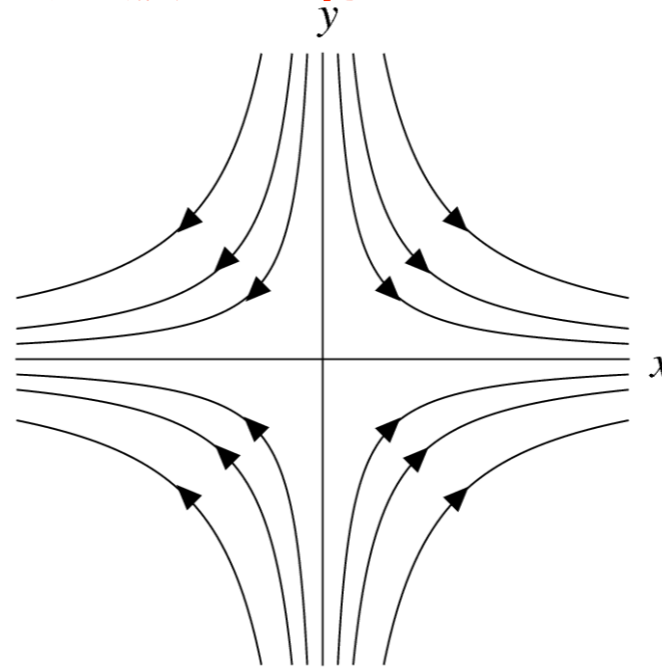
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{h}^i_j}{\partial t^2} \xi^j$$

$$\delta \xi^i = \frac{1}{2} \bar{h}^i_j \xi^j$$

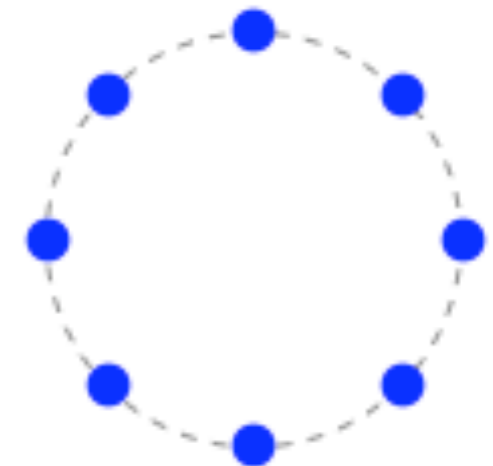
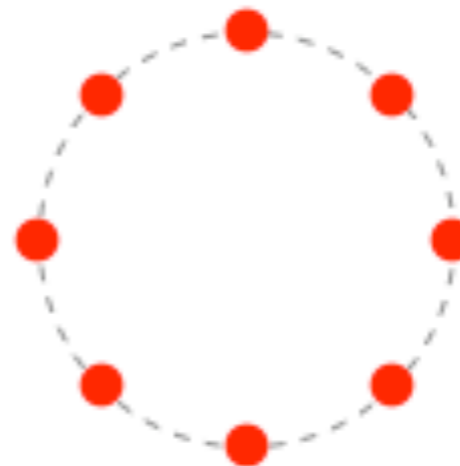
$$\begin{pmatrix} \delta \xi^x \\ \delta \xi^y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)}$$

$$= \frac{1}{2} h_+ \begin{pmatrix} \xi^x \\ -\xi^y \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2} h_\times \begin{pmatrix} \xi^y \\ \xi^x \end{pmatrix} e^{ik(ct-z)}$$

重力波の力線



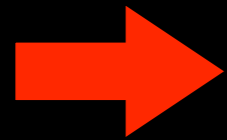
重力波の2つの偏波





目次

1. 重力波



2. 重力波検出器 TAMA300

3. ウェーブレット変換

4. TF (time-frequency) クラスタリング

5. イベント選別

6. まとめ



2.重力波検出器TAMA300

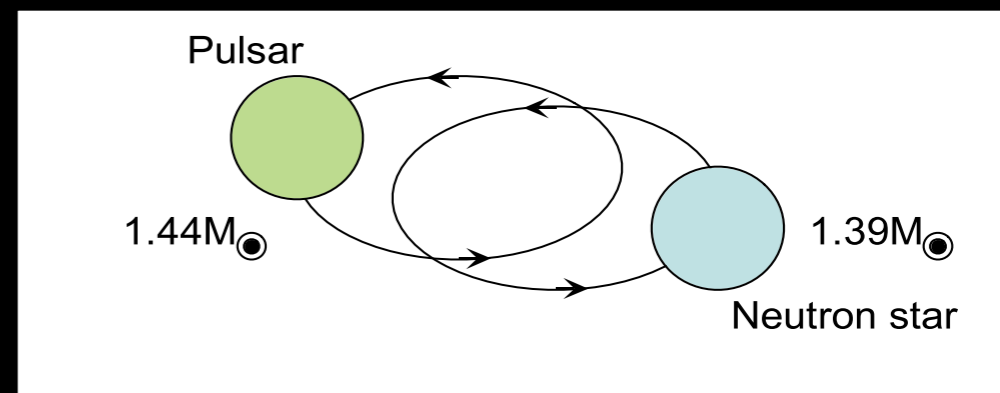
重力波の存在 (間接的証明)

連星中性子星

PSR1913+16

公転周期の変化率： $(-2.425 \pm 0.002) \times 10^{-12} \text{s/s}$

→ 76マイクロ秒/年



重力波の放出によつて

→ 3億年後に合

一般相対性理論： $(-2$

理論と観測の差は

→重力波の存在

ノーベル賞

Physics

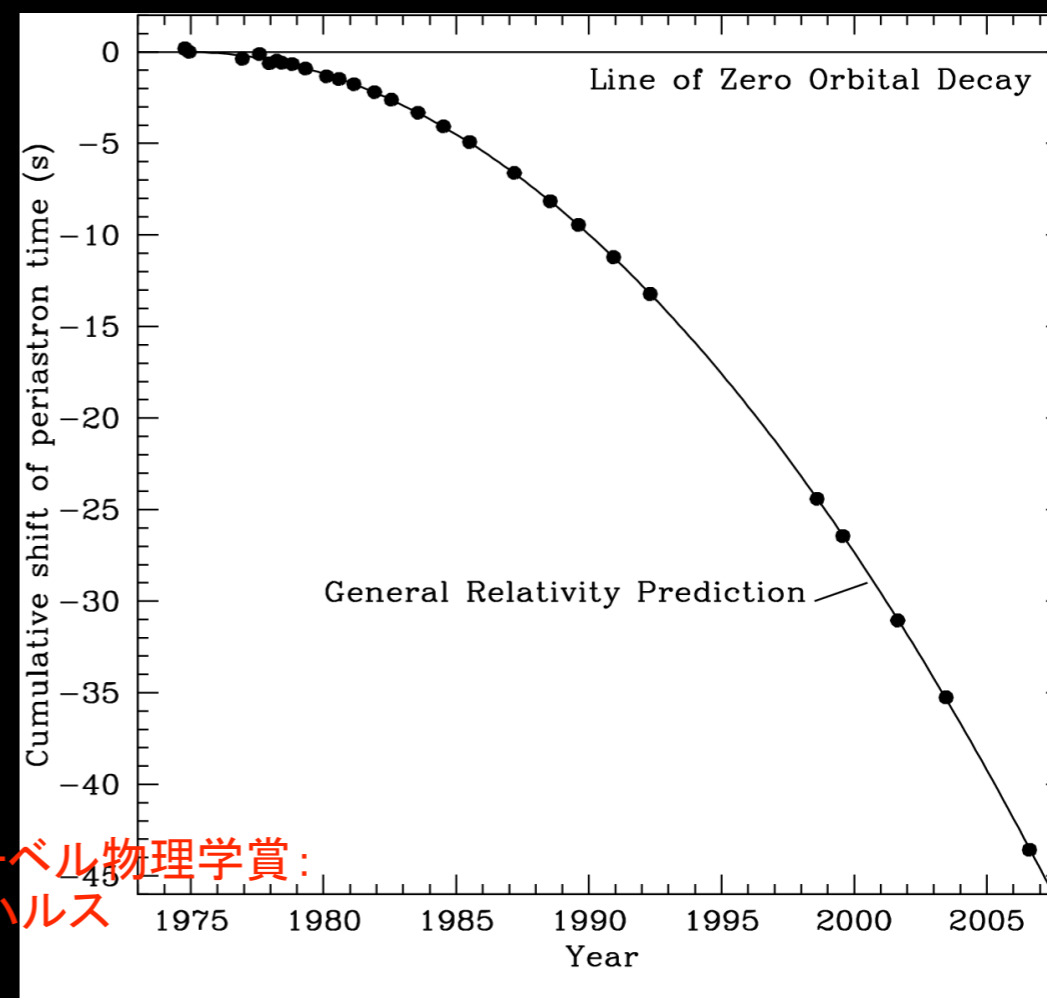
The Nobel Prize in Physics 1993

"for the discovery of a new type of pulsar, a discovery that has opened up new possibilities for the study of gravitation"

Russell A. Hulse	Joseph H. Taylor Jr.
1/2 of the prize	1/2 of the prize
USA	USA
Princeton University Princeton, NJ, USA	Princeton University Princeton, NJ, USA
b. 1950	b. 1941

Titles, data and places given above refer to the time of the award.
Photos: Copyright © The Nobel Foundation

1993年ノーベル物理学賞：
テイラー&ハルス

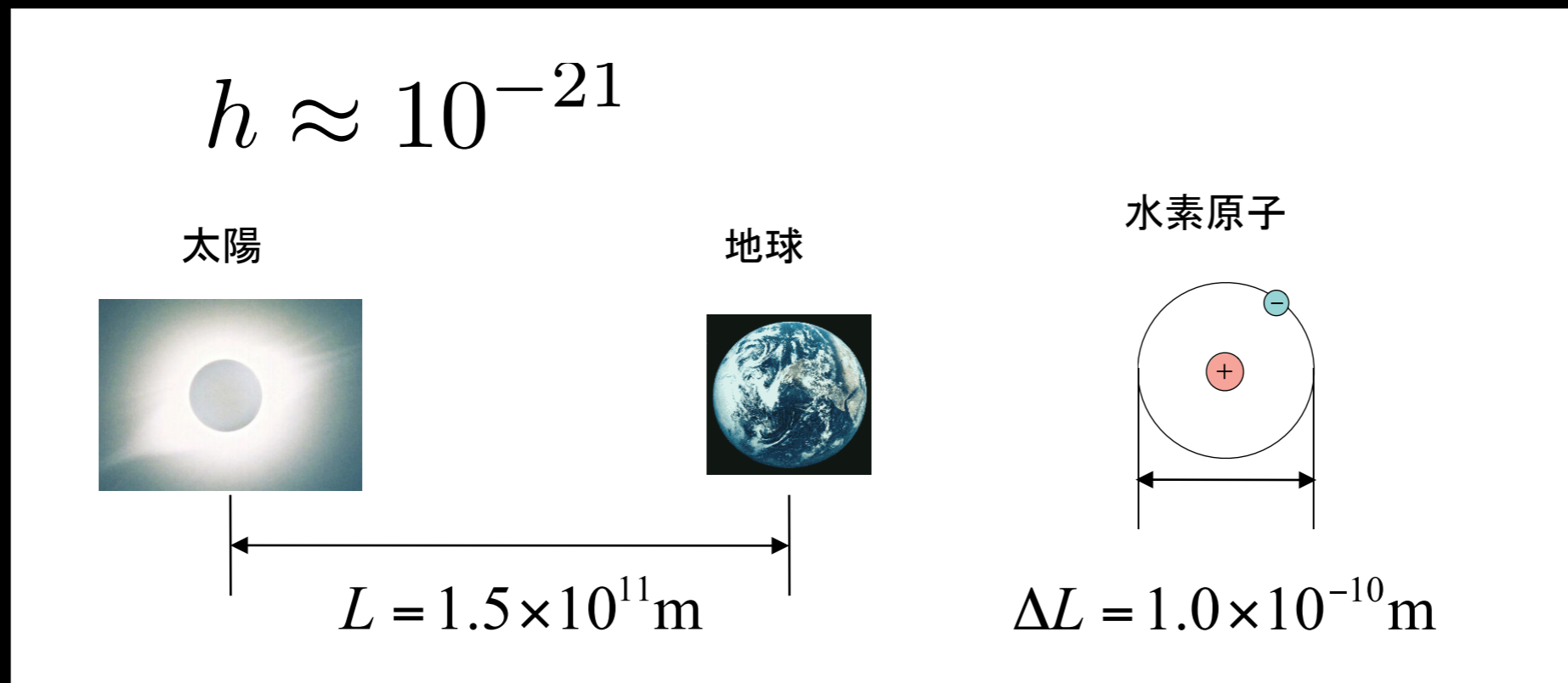




2.重力波検出器TAMA300

重力波の大きさ

期待される重力波の振幅 → 極めて小さな変化を捉える必要がある。

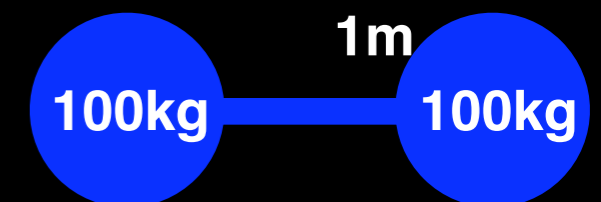


ちなみに・・・

長さ1mで100kgのおもりをつけたダンベルを毎秒1000回転させると

10⁵m程度離れて・・・ $h \sim 5 \times 10^{-40}$

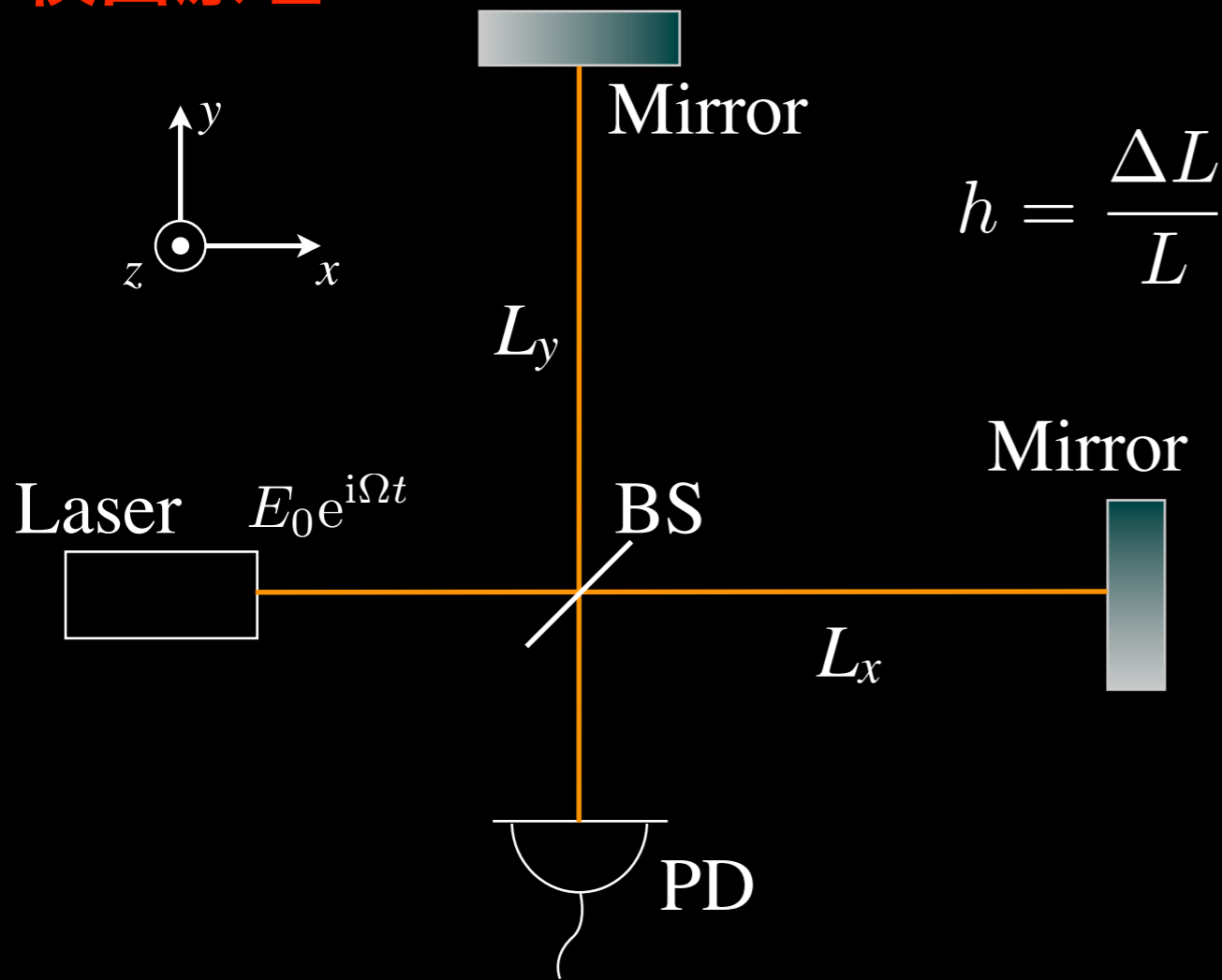
→ 人口的に発生させた重力波を検出するのはほぼ不可能





2.重力波検出器TAMA300

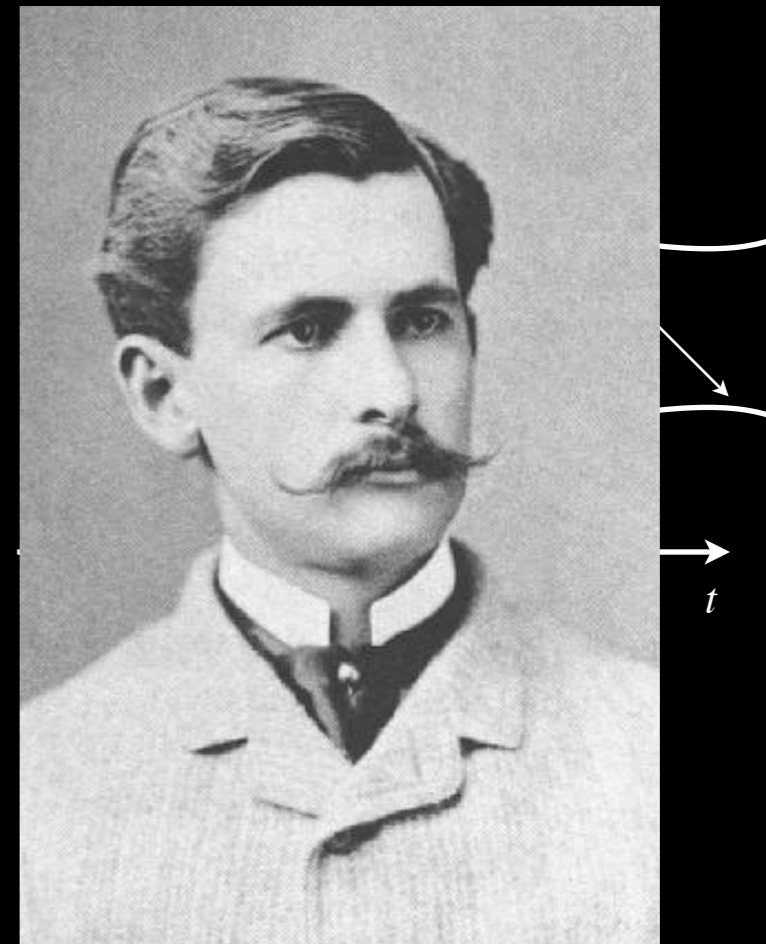
検出原理



マイケルソン干渉計

重力波による2点間の固有距離の変化

→PDで強度変化として現れる。



A. Michelson

電場 : $E_{PD} = \frac{1}{2} E_0 \exp^{i(\Omega t - \phi_x)} - \frac{1}{2} E_0 \exp^{i(\Omega t - \phi_y)}$

強度 : $P_{PD} = |E_{PD}|^2 = E_0^2 \sin^2(2\pi \Delta L / \lambda)$

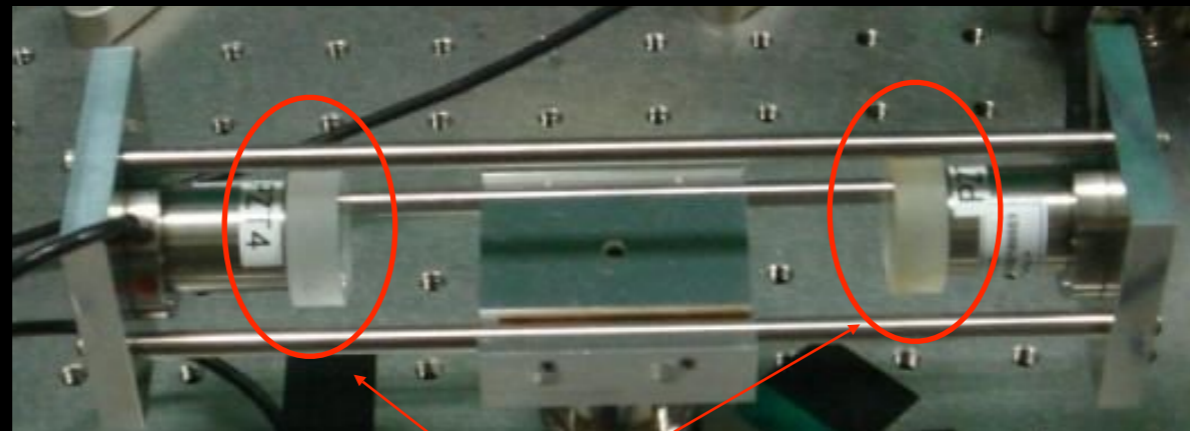
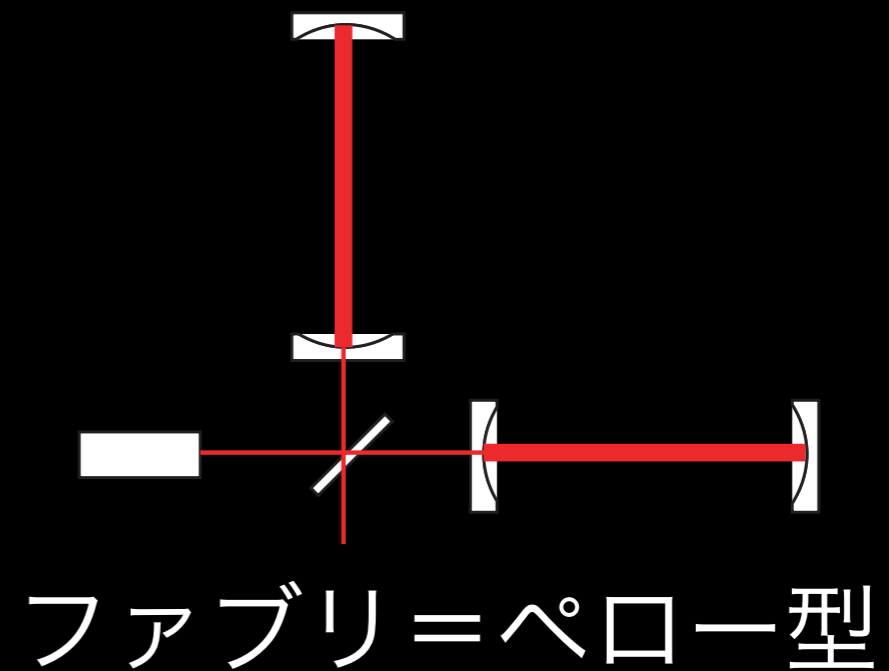
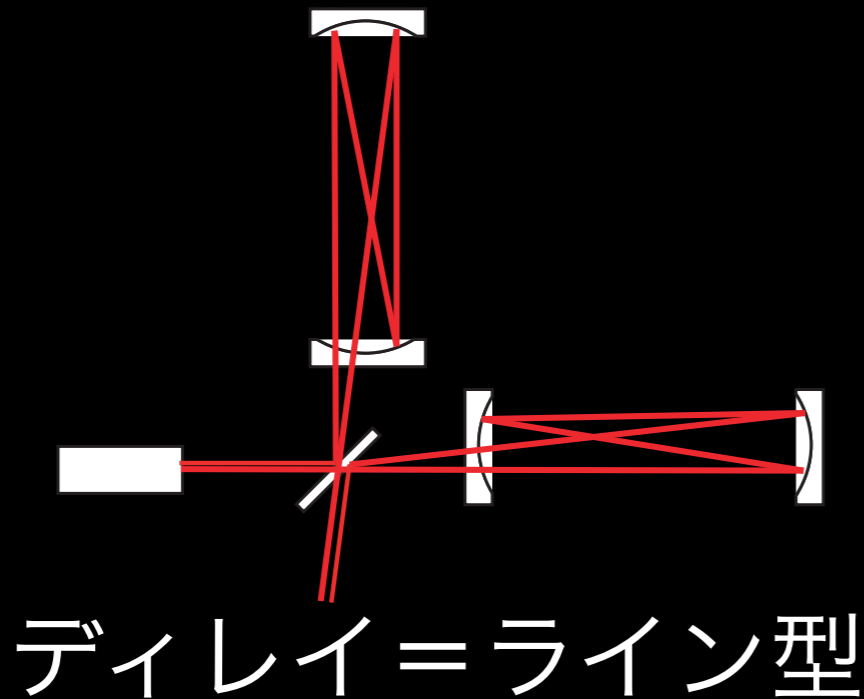
$\Delta\phi \equiv \phi_x - \phi_y$: 2つの光路での位相差



2.重力波検出器TAMA300

光路長を稼ぐ工夫

光の飛ぶ距離に比例して重力波の効果が大きくなる



鏡



2.重力波検出器TAMA300

構成

Fabry-Perot型Michelsonレーザー干渉計

10w Nd:YAGレーザー (1064nm)

基線長 : 300m

建設場所

国立天文台 (東京都三鷹市)

感度

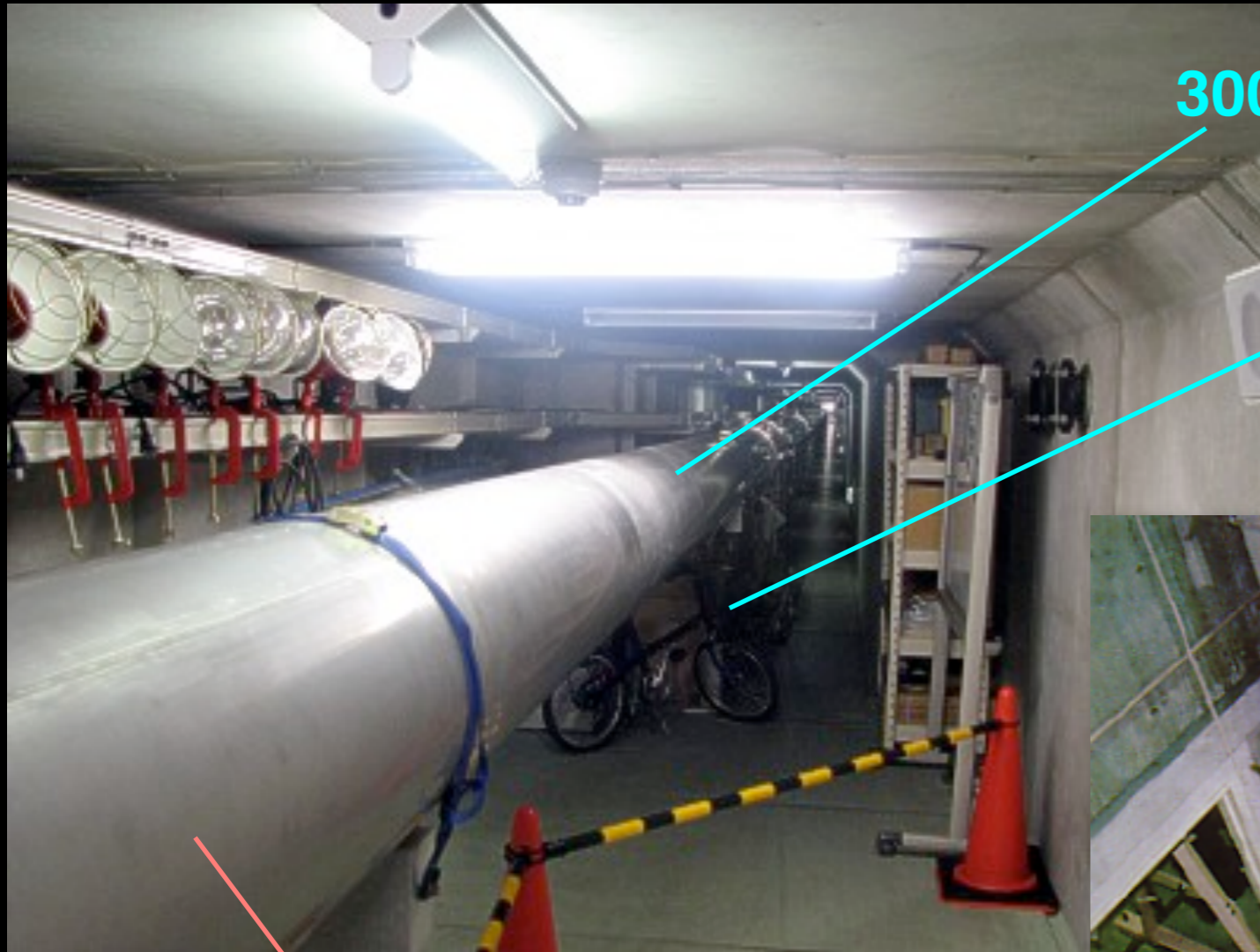
1.5×10^{-21} [Hz^{-1/2}] @ 1kHz

1999年に稼働を開始してから計3000時間を
越えるデータを取得してきた。





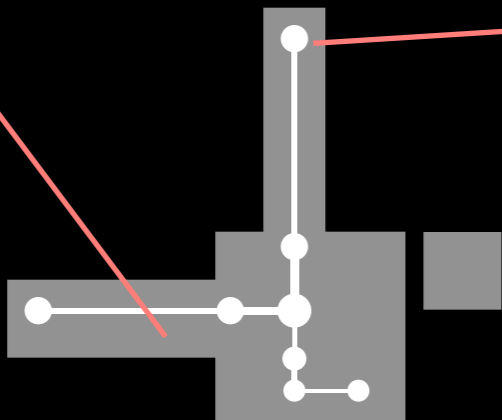
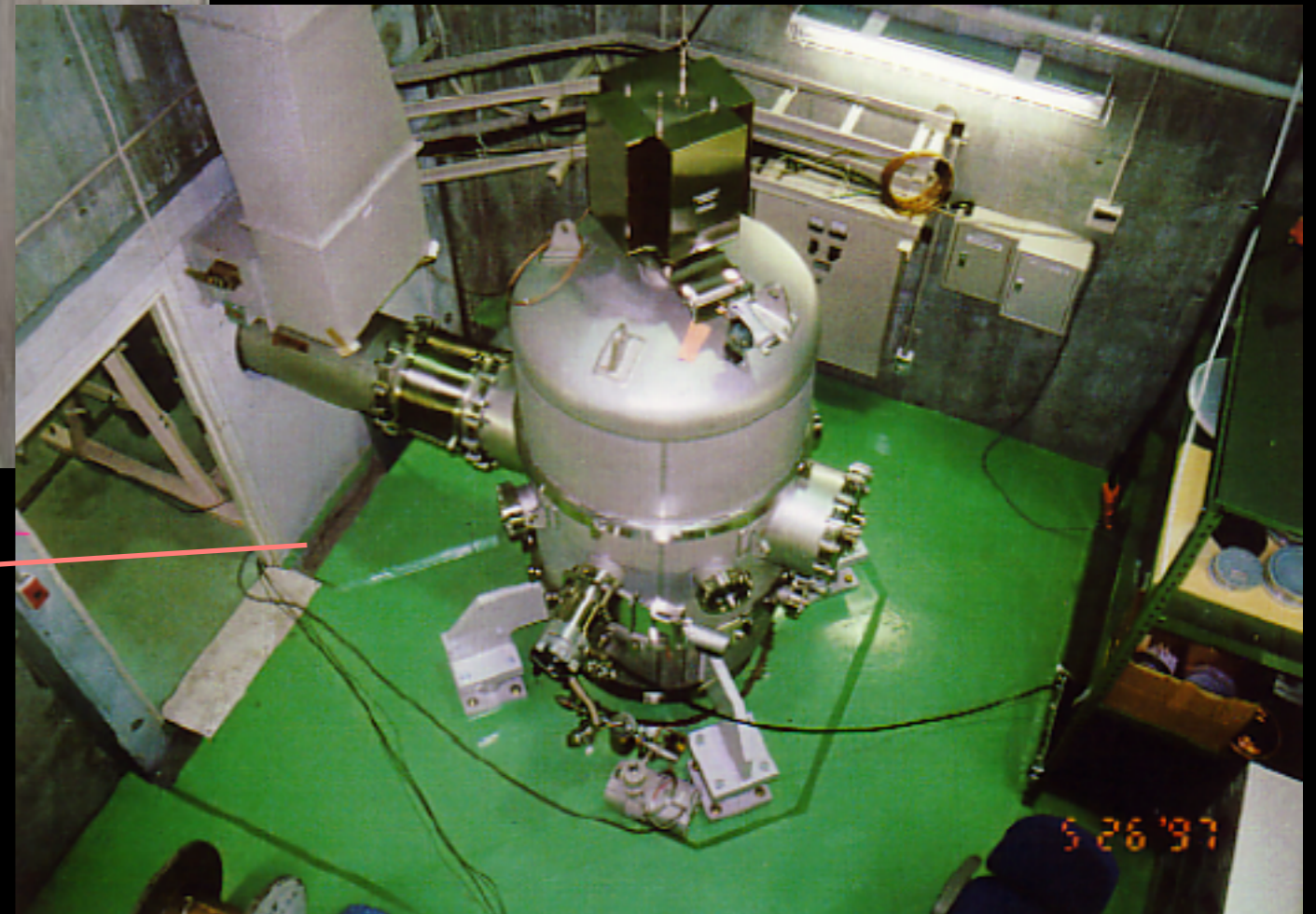
2.重力波検出器TAMA300



300m 真空パイプ

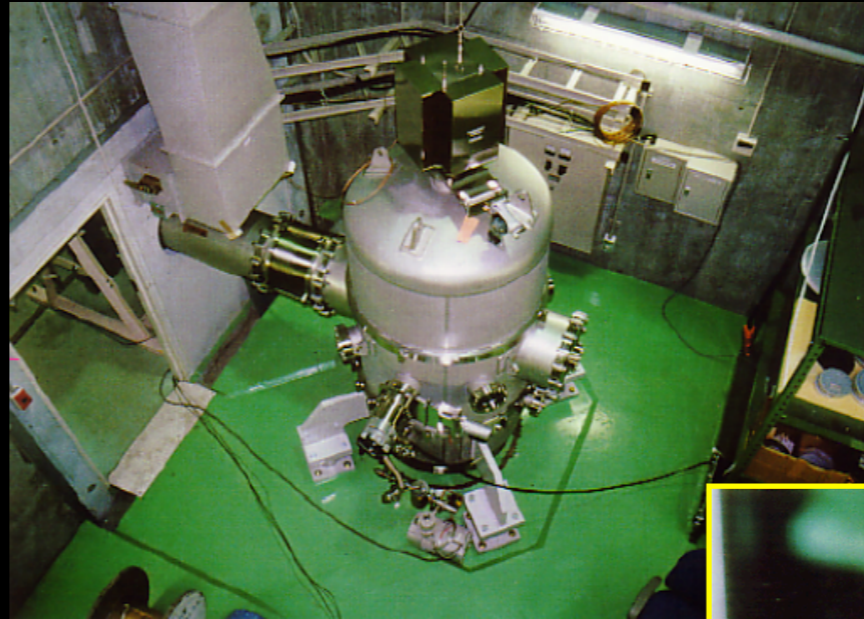
移動用自転車

エンド真空槽

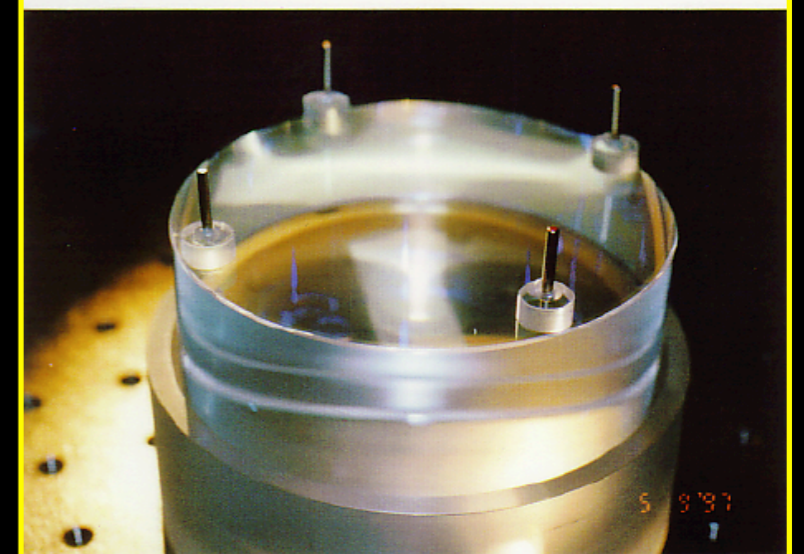




2.重力波検出器TAMA300



ミラー





2.重力波検出器TAMA300

TAMA300 観測運転履歴

Data Taking	観測時間	データ取得時間	(Typical)感度
DT1	1999/8/6 ~ 8/7	11 時間	3×10^{-19} [1/√Hz]
DT2	1999/9/17 ~ 9/20	31 時間	3×10^{-20} [1/√Hz]
DT3	2000/4/20 ~ 4/23	13 時間	1×10^{-20} [1/√Hz]
DT4	2000/8/21 ~ 9/4	167 時間	1×10^{-20} [1/√Hz]
DT5	2001/3/2 ~ 3/10	111 時間	1.7×10^{-20} [1/√Hz]
DT6	2001/8/1 ~ 9/20	1038 時間	5×10^{-21} [1/√Hz]
DT7	2002/8/31 ~ 9/2	25 時間	
DT8	2003/2/14 ~ 4/15	1158 時間	3×10^{-21} [1/√Hz]
DT9	2003/11/28 ~ 04/1/10	557 時間	1.5×10^{-21} [1/√Hz]



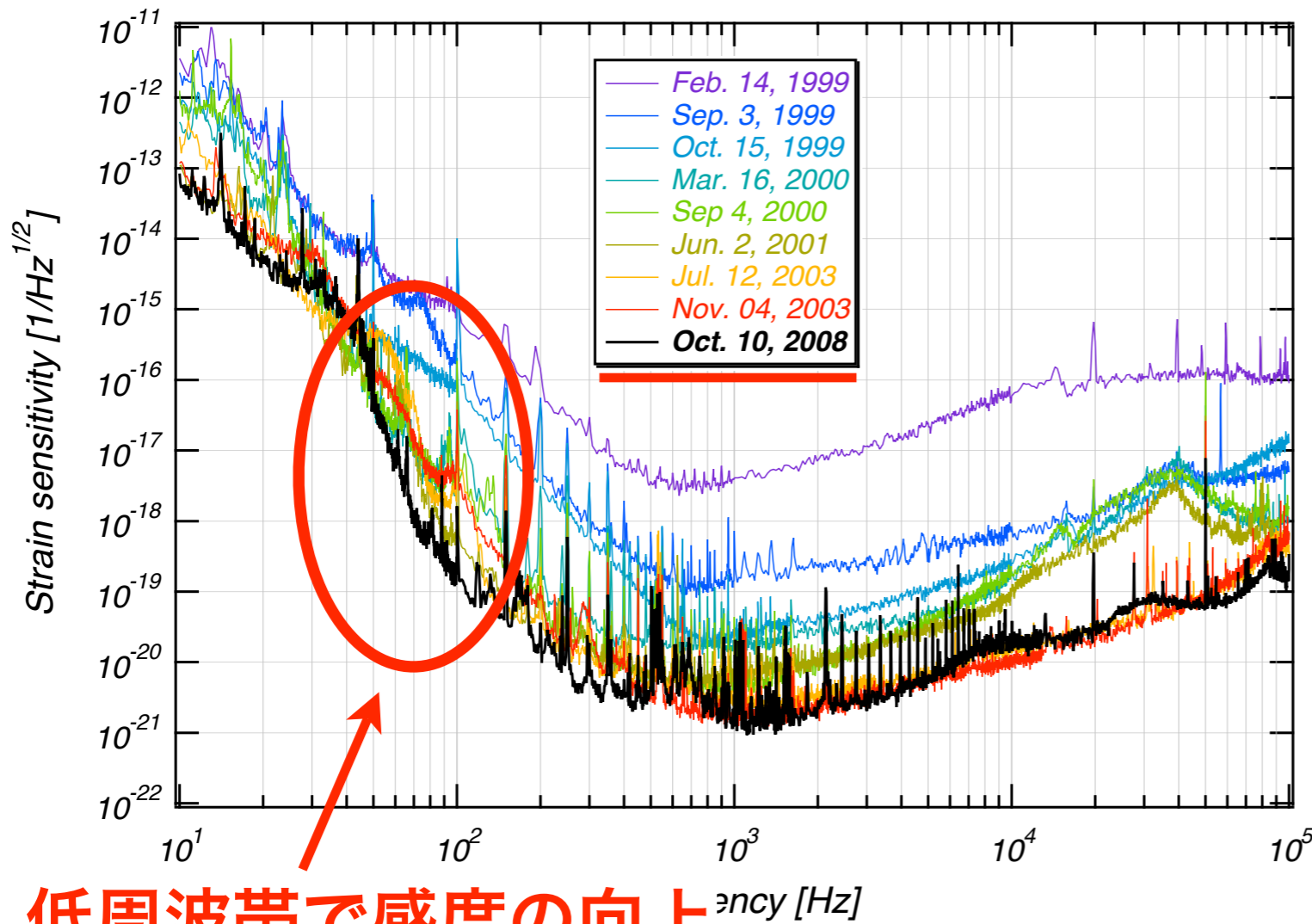
2.重力波検出器TAMA300

時系列信号 $v(t)$

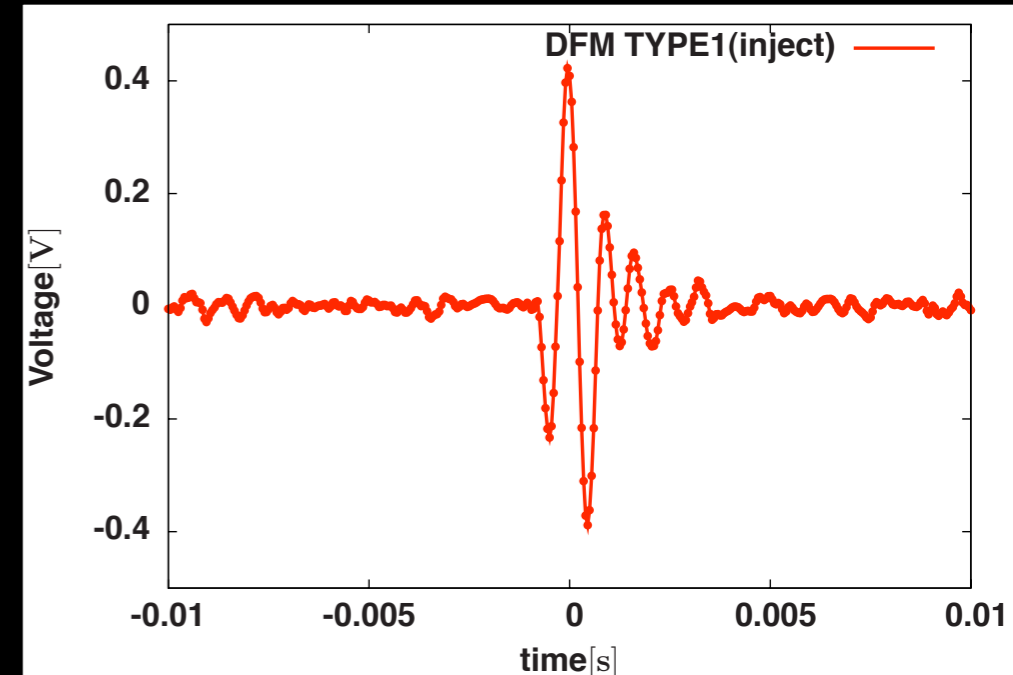
感度 (strain sensitivity : latest version)

DFM+ノイズ (注入シミュレーション)

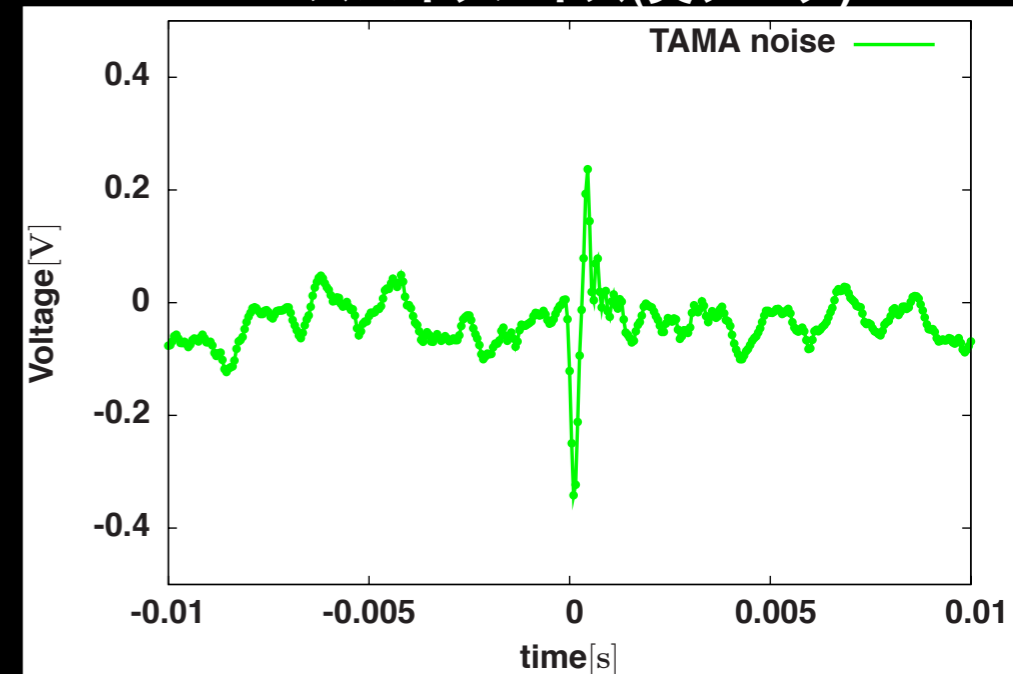
(時空の歪みの大きさ)



低周波帯で感度の向上 (周波数)



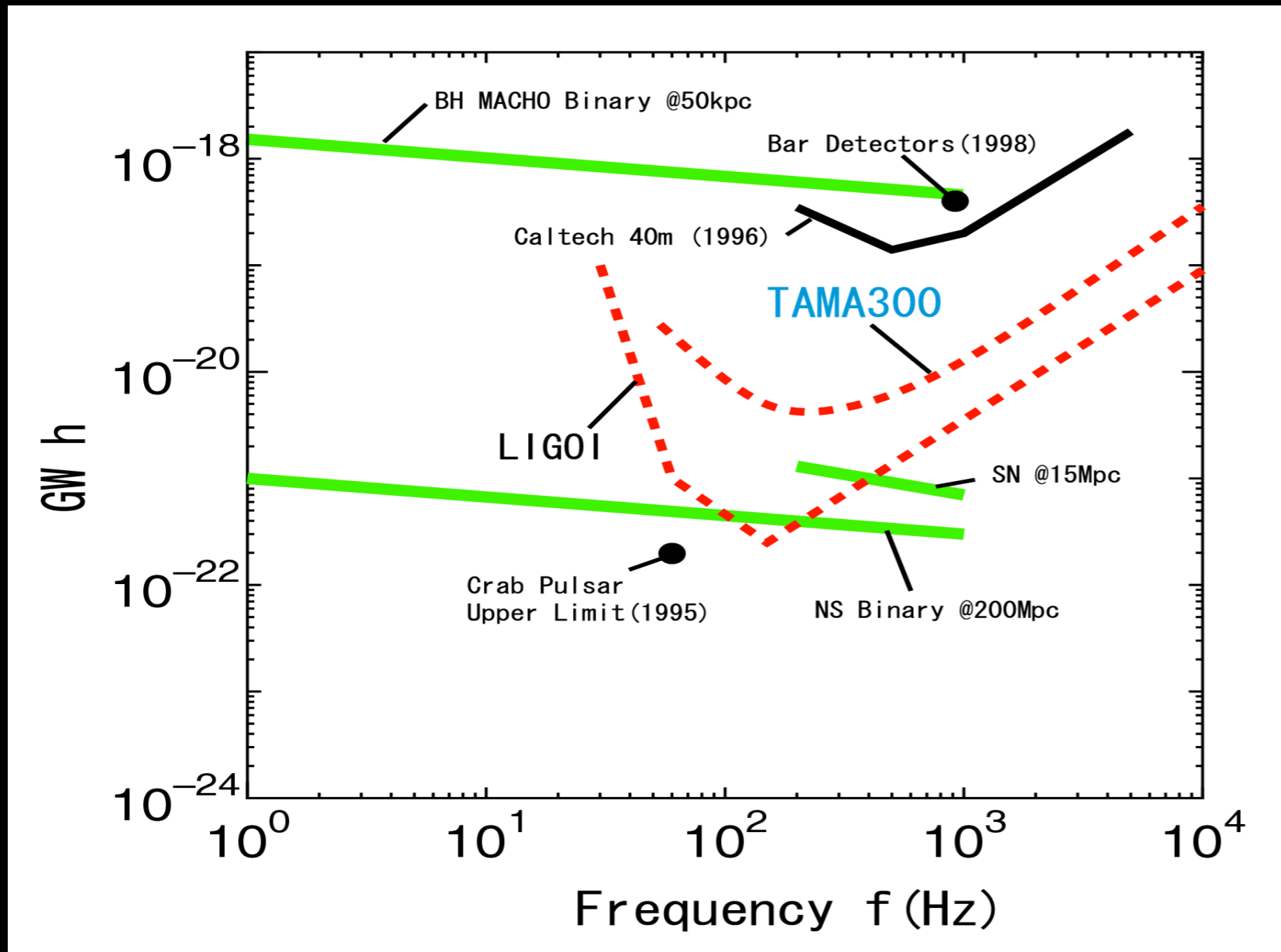
スパイクノイズ(実データ)





2.重力波検出器TAMA300

TAMA300と重力波源

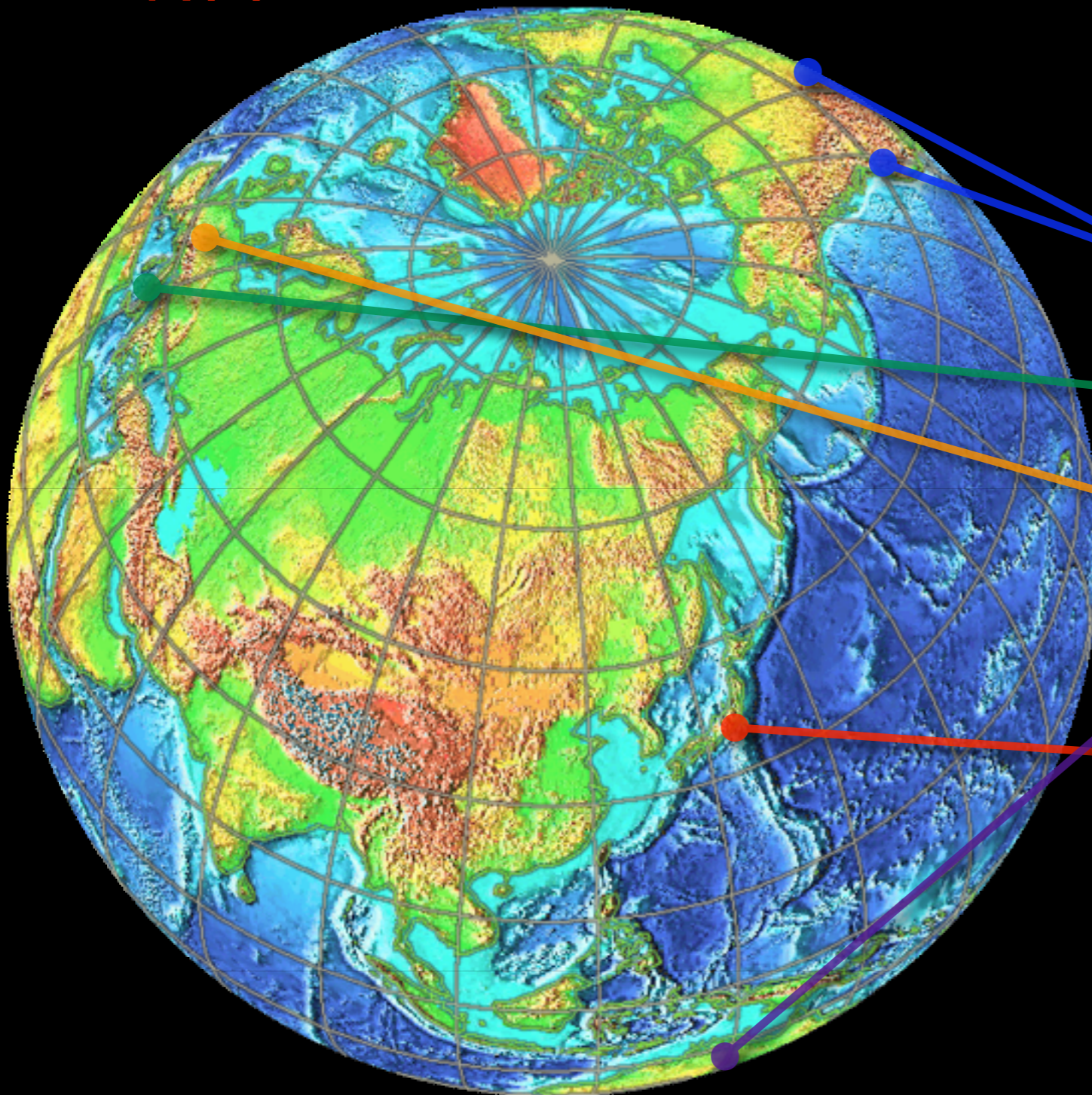


- 現在のTAMAで検出可能な重力波源

MACHO-BHの合体

2.重力波検出器TAMA300

大型計画



世界のレーザー干渉計実験

- ★ LIGO (米国)
- ★ VIRGO (イタリア, フランス)
- ★ GEO (ドイツ, イギリス)
- ★ ACIGA (オーストラリア)
- ★ TAMA (日本)



目次

1. 重力波

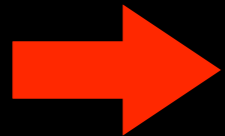
2. 重力波検出器 TAMA300

3. ウェーブレット変換

4. TF (time-frequency) クラスタリング

5. イベント選別

6. まとめ

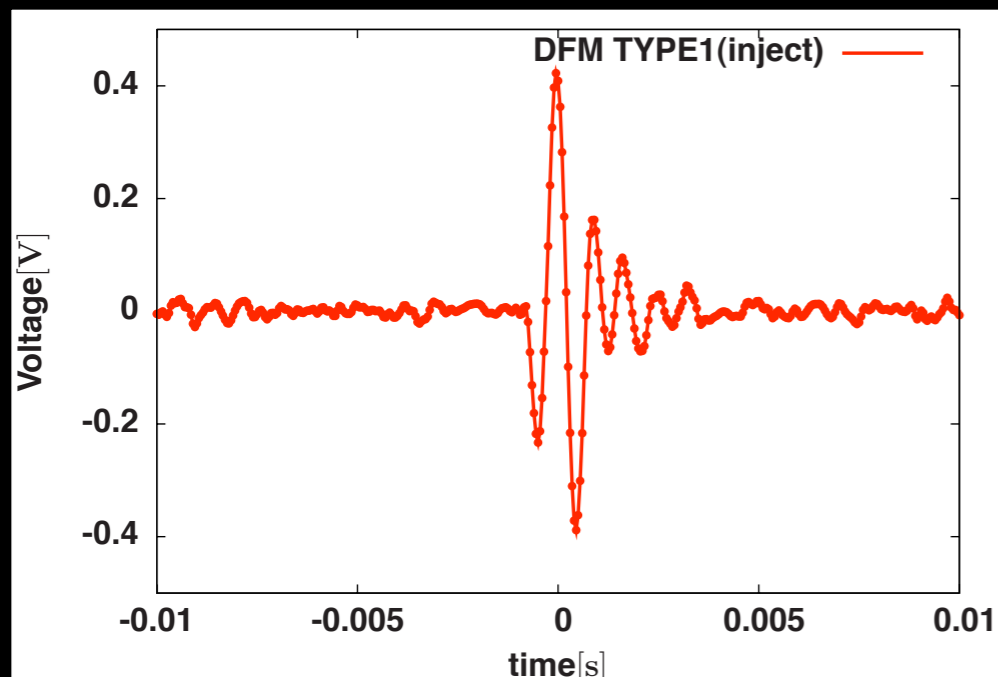




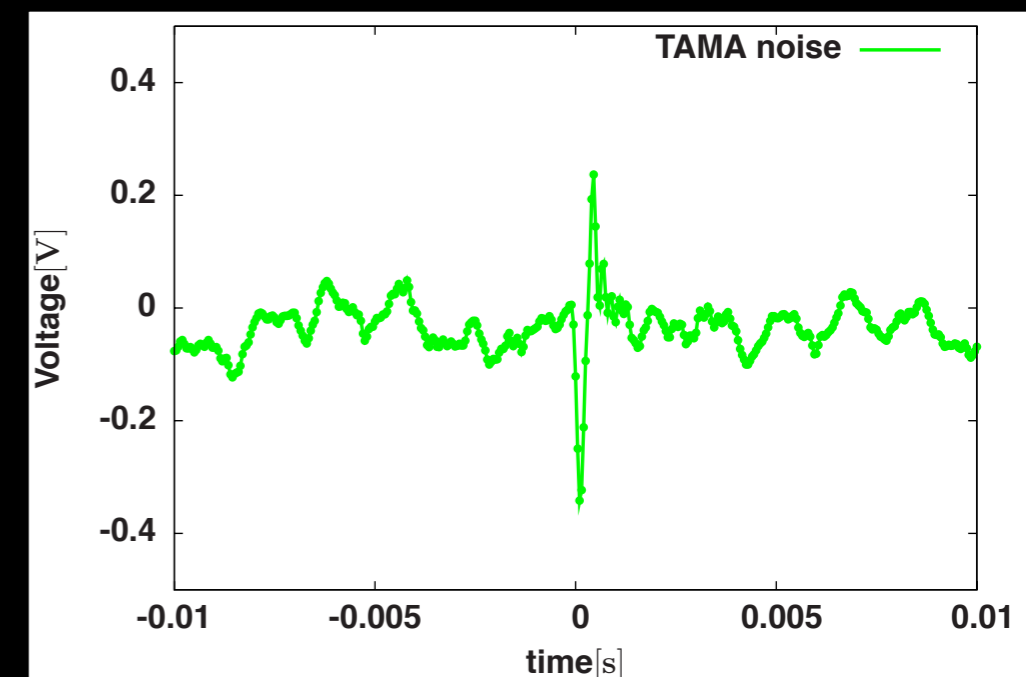
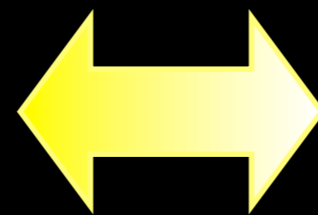
データ解析概要

• やりたいこと

- 観測データに埋もれた重力波の信号を取り出したい。
- 超新星爆発起源の**バースト重力波**とTAMAデータに存在する**スパイクノイズ**を分離したい。



分離したい





データ解析概要

問題

超新星爆発起源の重力波 → 波形の詳細はよく分かっていない。

➡ 探索には波形の不確定性に影響されない解析手法が要請される。

方針

TFクラスタリング： 時系列信号をTF(time-frequency)平面に投影し、
パワー分布の塊(クラスタ)を認識する。

ウェーブレット変換： 信号をTF平面に投影する際に用いる。

イベント選別： TFクラスタから得られるパラメータを用いて、
バースト重力波とノイズを区別する。

➡ TAMA300 第9回観測(DT9) データを使って解析手法を評価する。



バースト重力波

バースト重力波

- ・ 波源 : 超新星爆発
- ・ 特徴 : 数10msecの時間スケール
数msecのスパイクとリングングテール

解析的に予測が困難

テンプレートと相関をとる手法は不適

Wiener Optimal Filter → ✕

DFM波形

H.Dimmelmeier, J.A.Font, E.Müller
数値シミュレーションによる26の波形

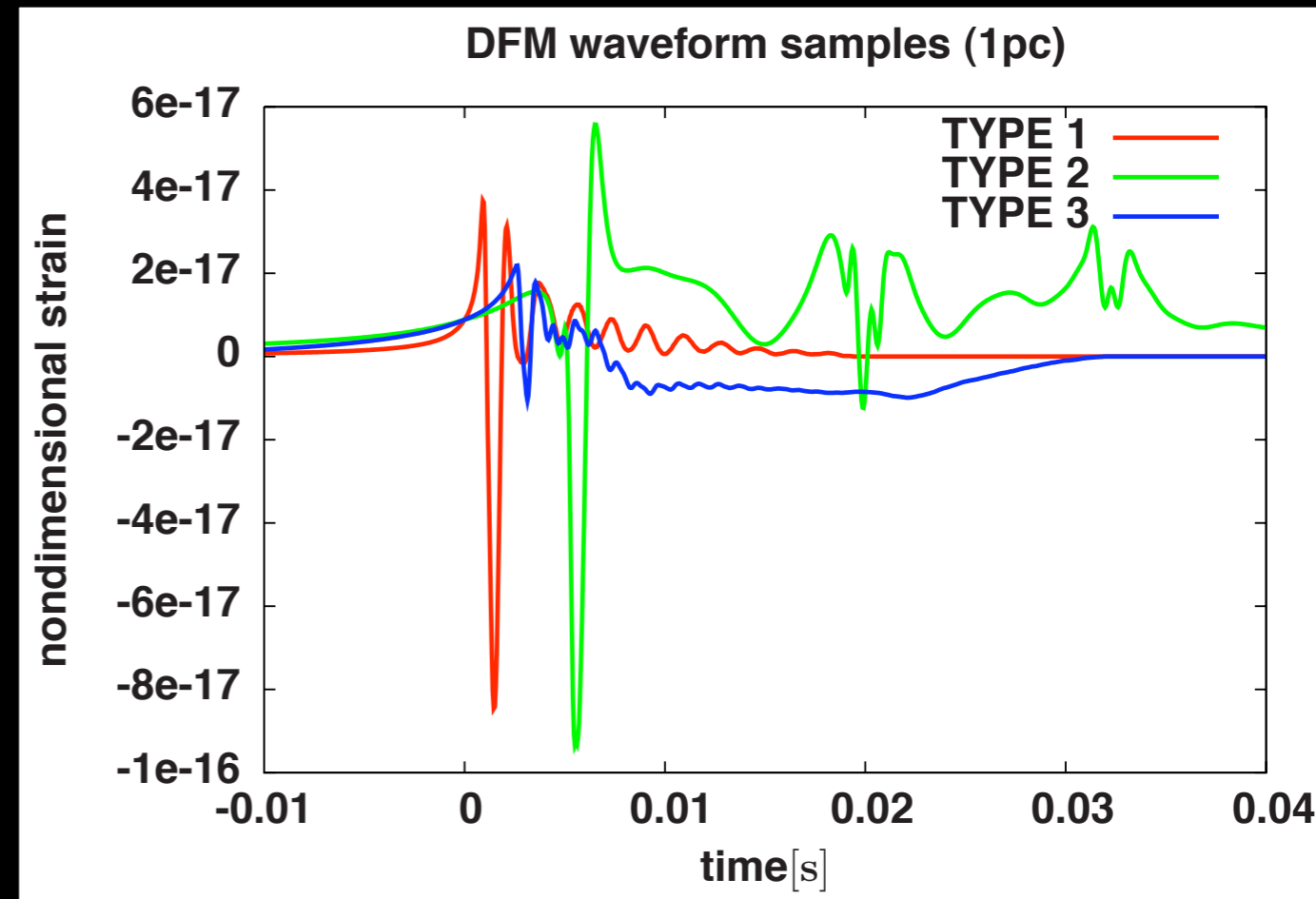
波形の特徴から

TYPE1:数msのスパイクとリングングテール

TYPE2:数10ms間に数回のスパイク

TYPE3:振幅が小さく短時間で減衰

と分類する。

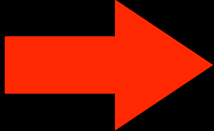


A&A.388.917-935(2002)

A&A.393.523-542(2002)



目次

1. 重力波
2. 重力波検出器 TAMA300
-  3. ウェーブレット変換
4. TF (time-frequency) クラスタリング
5. イベント選別
6. まとめ



3. ウェーブレット変換

- 利点
- ・ 計算時間的に優れている
 - ・ 変換、逆変換を施してもパワーは保存

➡ 時系列信号をTF平面に投影するのに採用。

- ・ 検出器の出力信号 $v(t)$ のウェーブレット展開

$$v(t) = s(t) + n(t) = \sum_j \sum_k \check{s}_{jk} \psi_{jk}(t) + \sum_j \sum_k \check{n}_{jk} \psi_{jk}(t)$$

$s(t)$: 重力波信号 $n(t)$: ノイズ

- ・ ウェーブレット展開係数 (mother ウェーブレット関数: $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$)

$$\check{\alpha}_{jk} = (W_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) = (W_\psi f)(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) f(x) dx$$

- ・ 時刻 t_i , 周波数 f_j における $v(t)$ のウェーブレット展開係数を $\check{v}(t_i, f_j)$ と表記

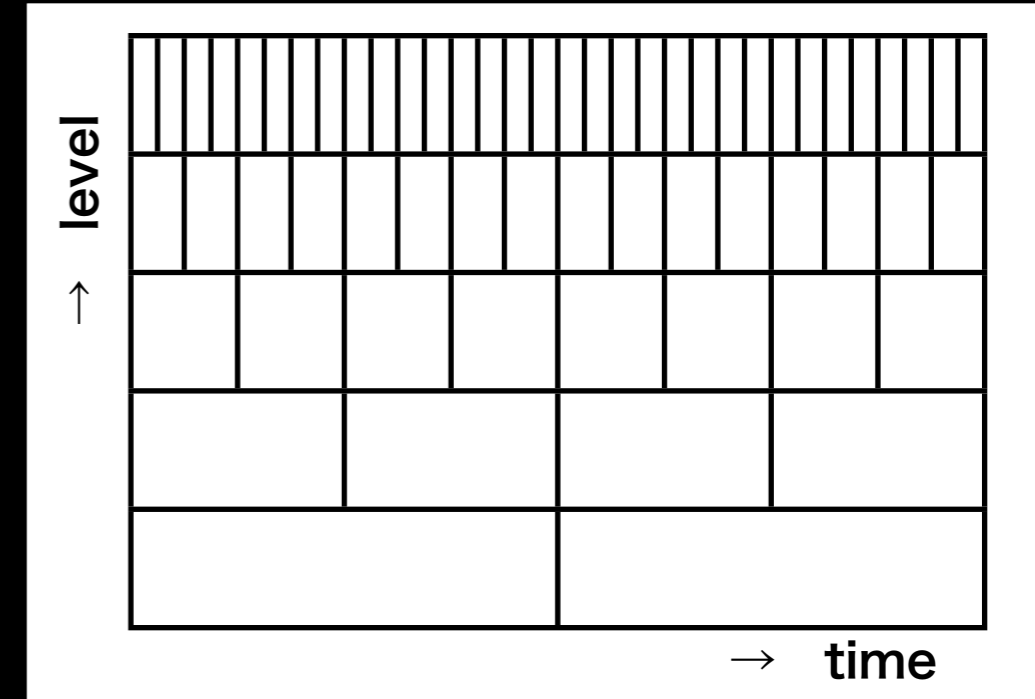
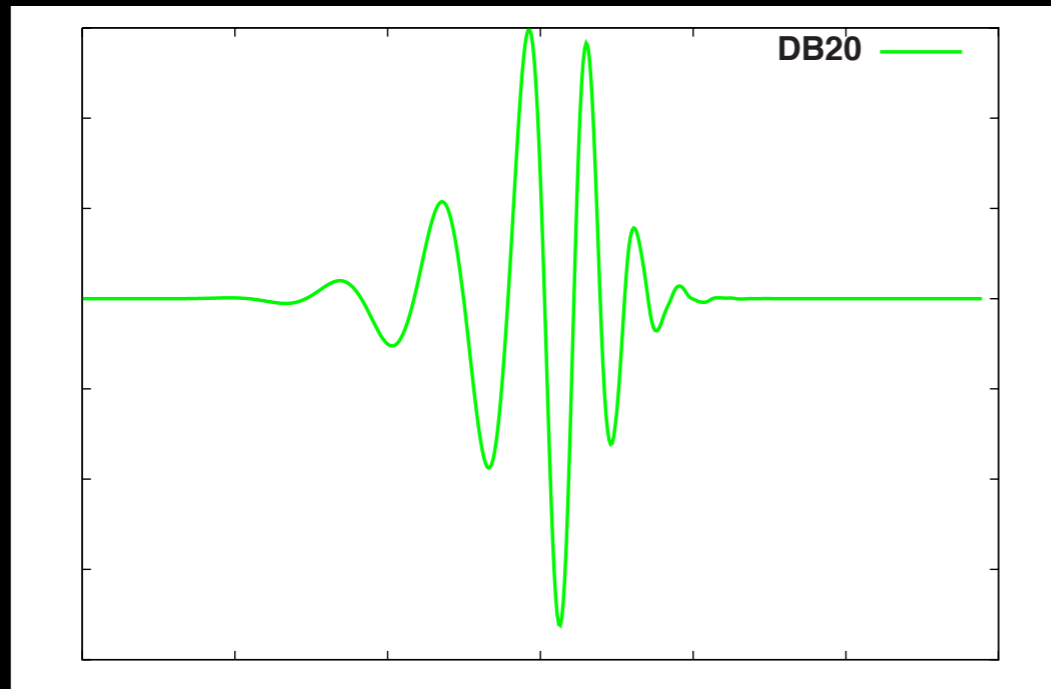


3. ウェーブレット変換

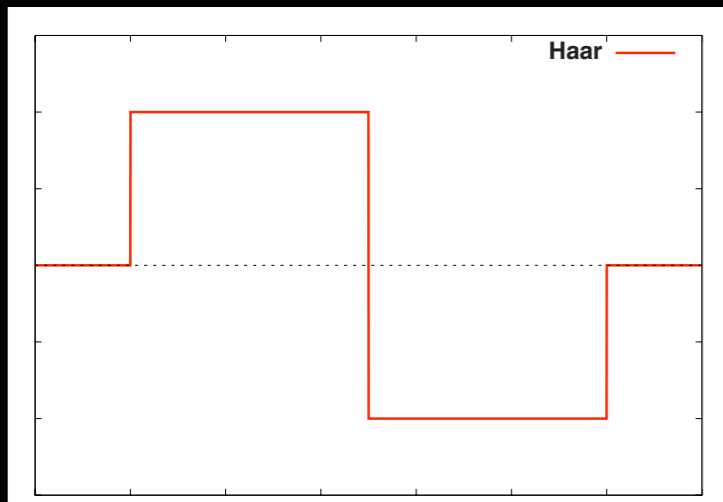
ウェーブレット基底

TF平面での表示方法 $\check{v}(t_i, f_j)$

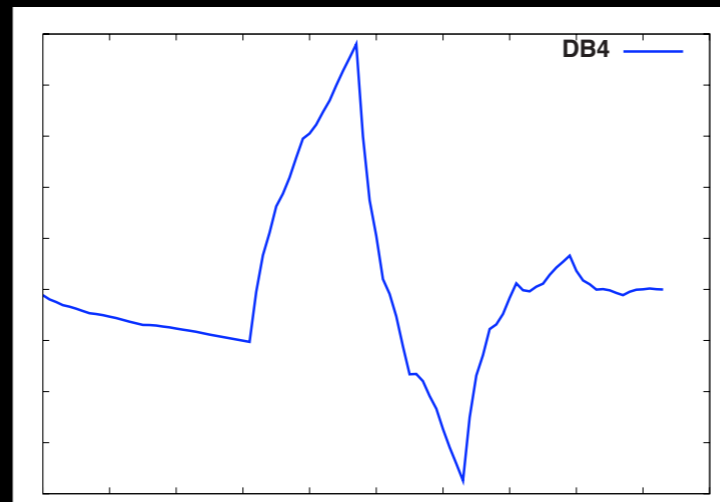
Doubechies 20 ウェーブレット基底



Haar ウェーブレット基底 (DB2)



Doubechies 4 ウェーブレット基底



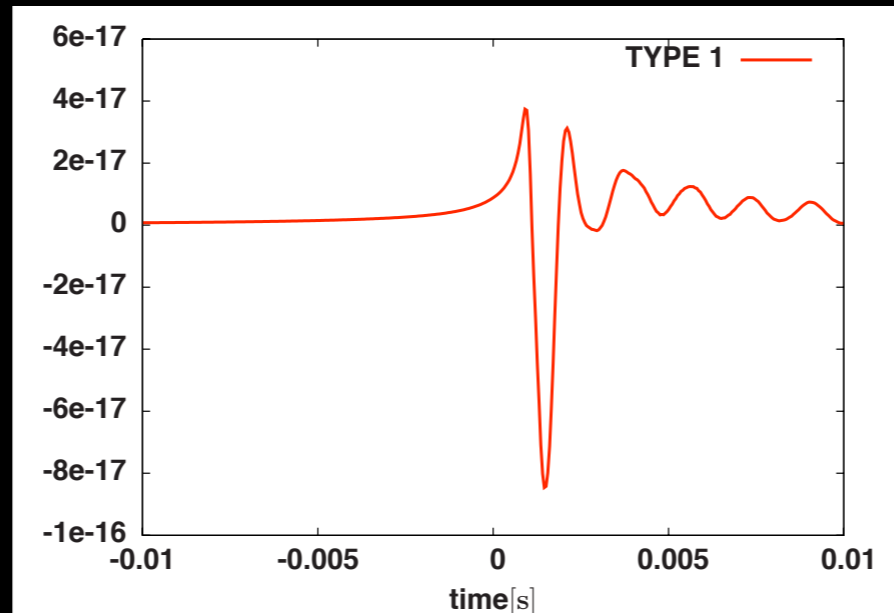
周波数とlevelの関係

$$f = f_{\max} / 2^{(\text{level}+1)}$$

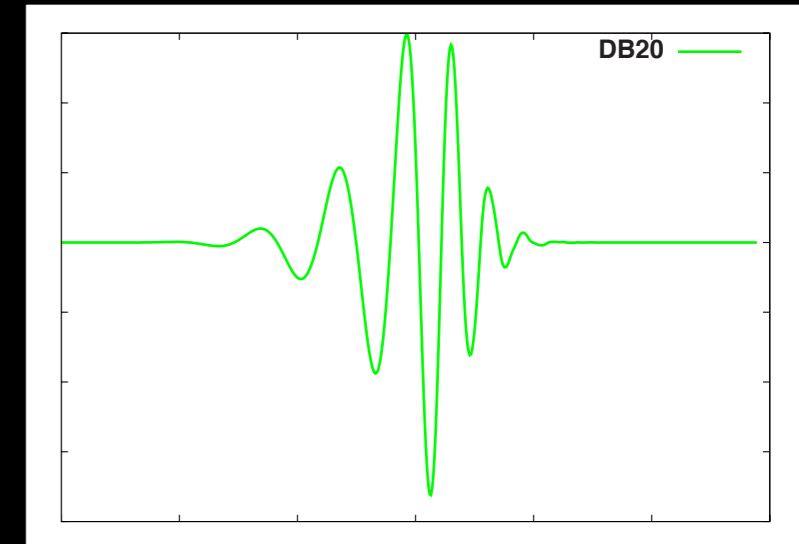
$$f_{\max} = 20000[\text{Hz}] \text{ (sampling frequency)}$$



3. ウェーブレット変換



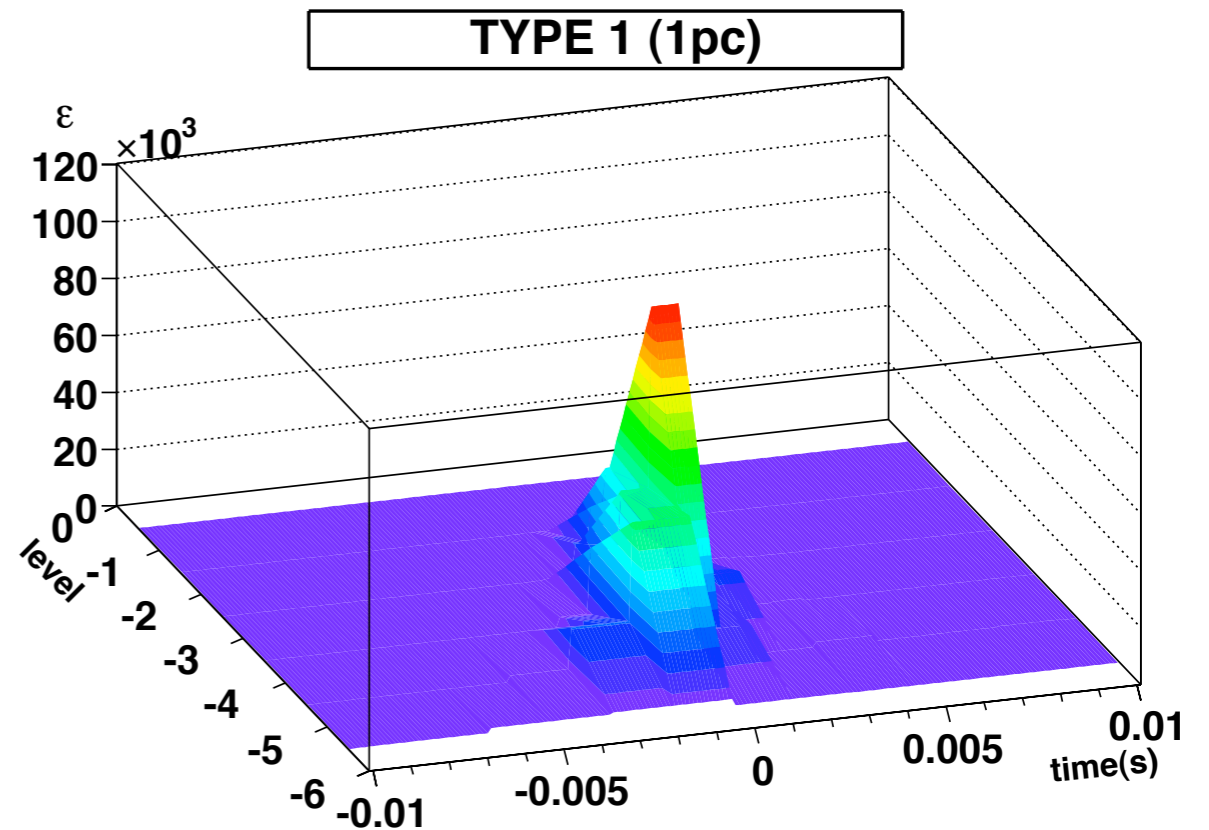
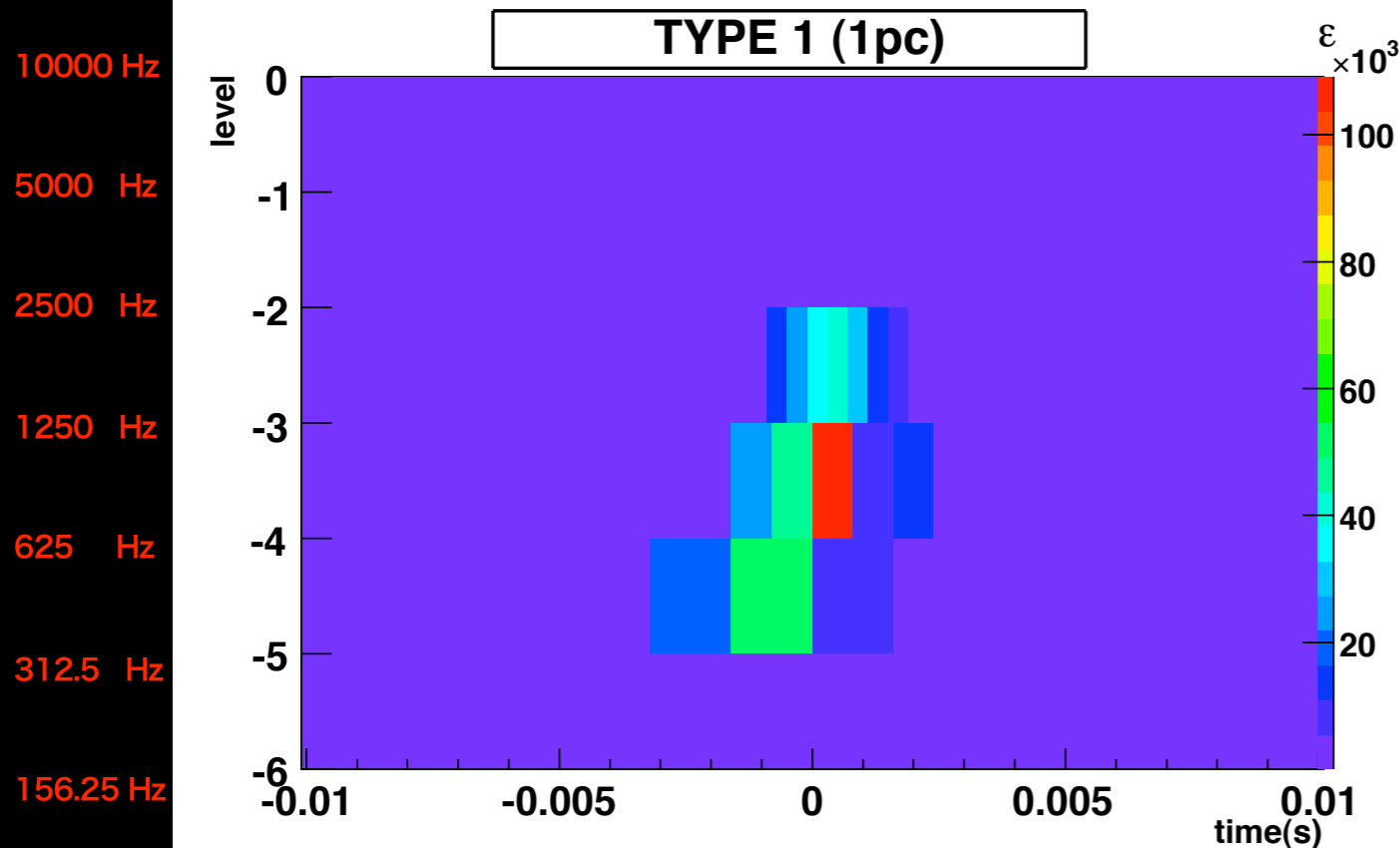
Doubechies 20 ウェーブレット基底



$$f = f_{\max} / 2^{(\text{level}+1)}$$

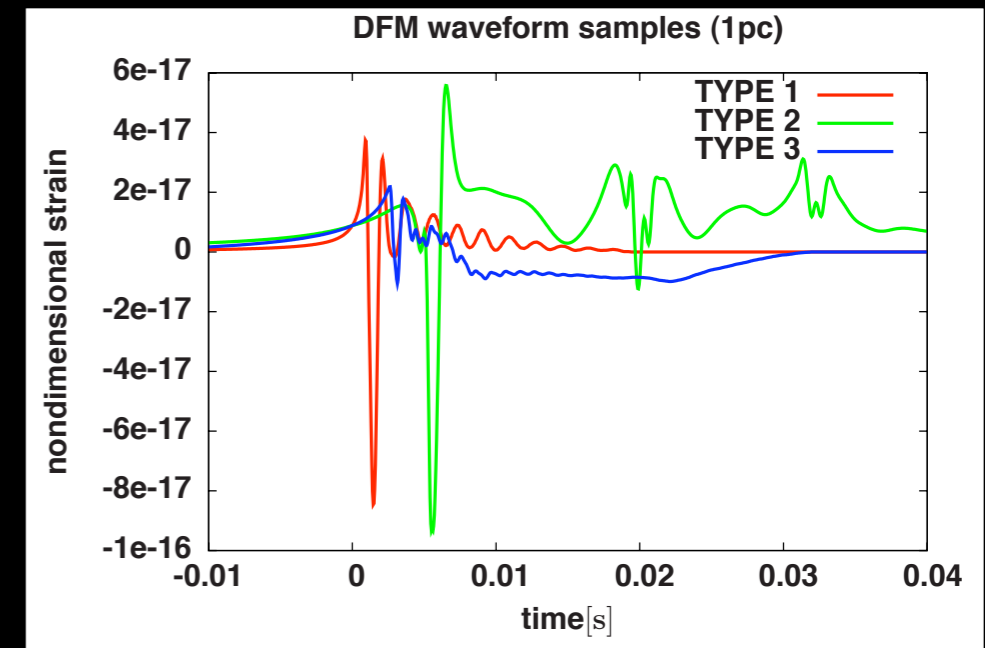
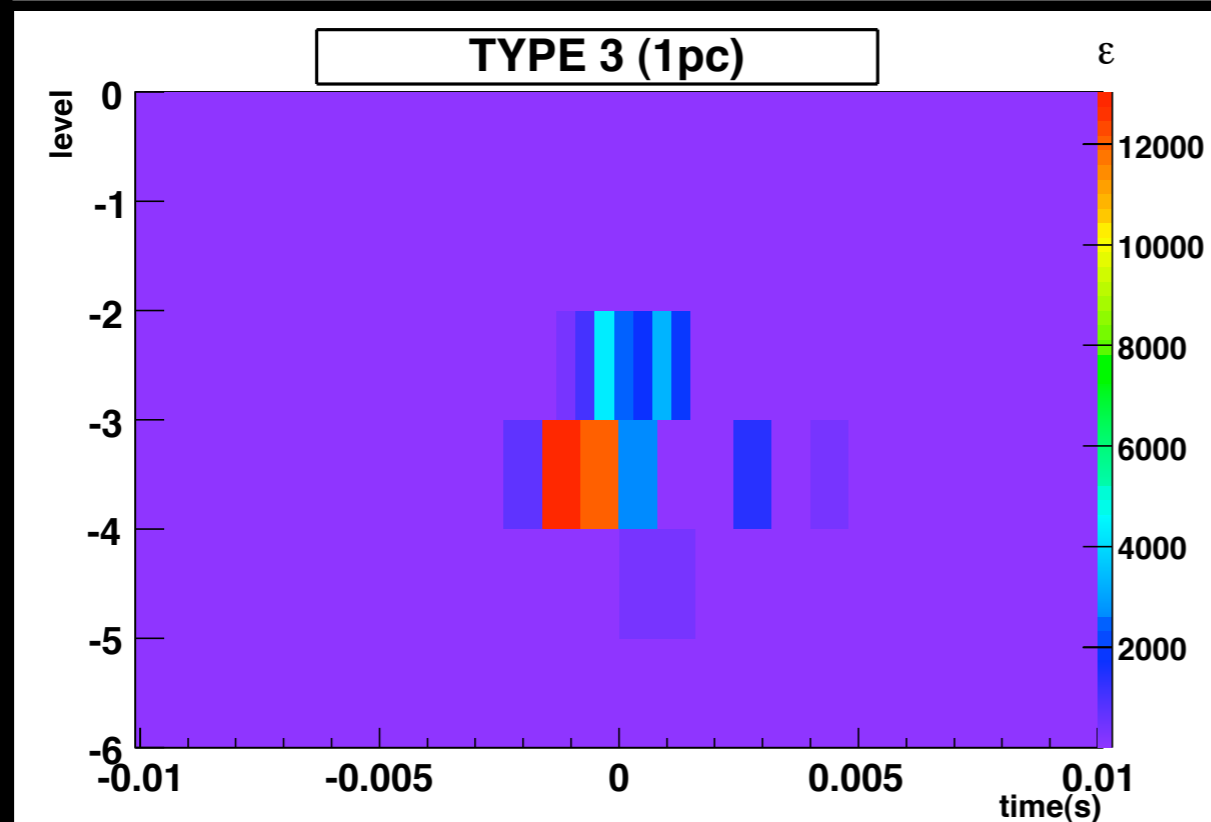
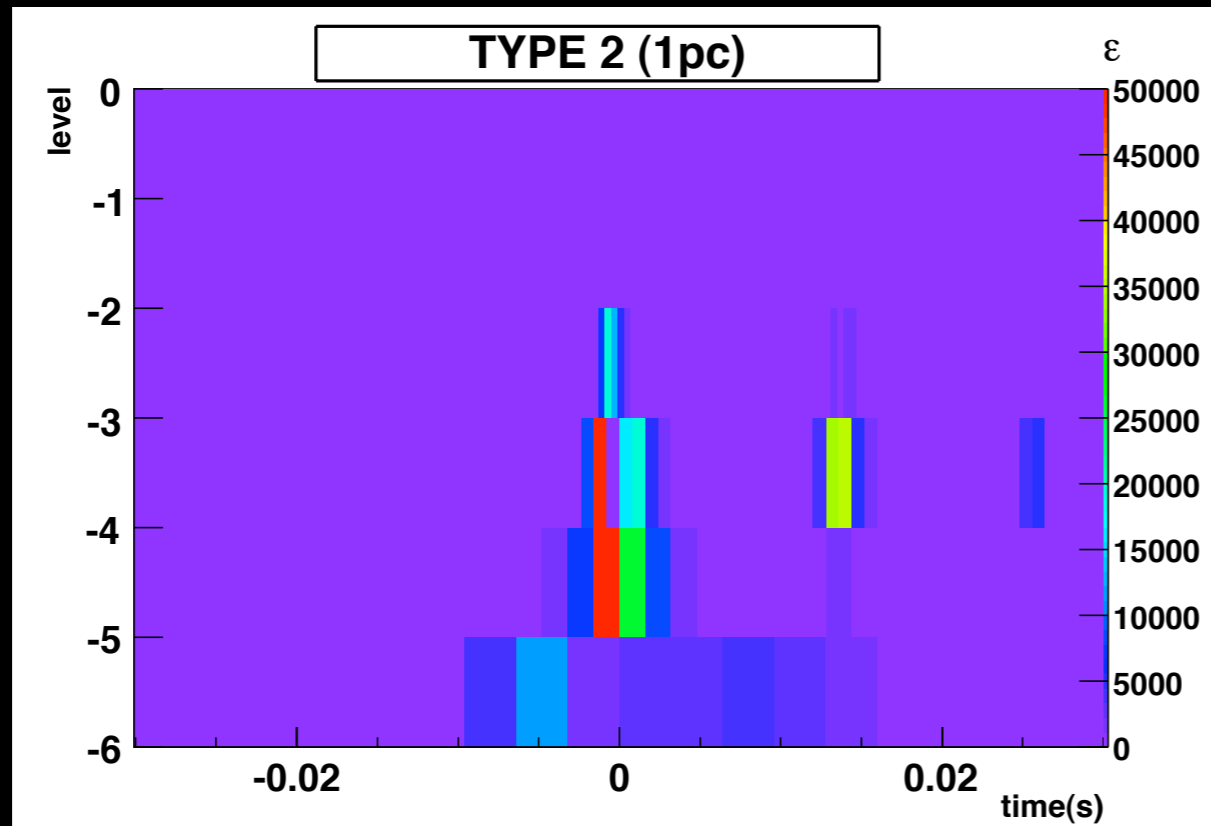
$$f_{\max} = 20000[\text{Hz}] \text{ (sampling frequency)}$$

ウェーブレット変換



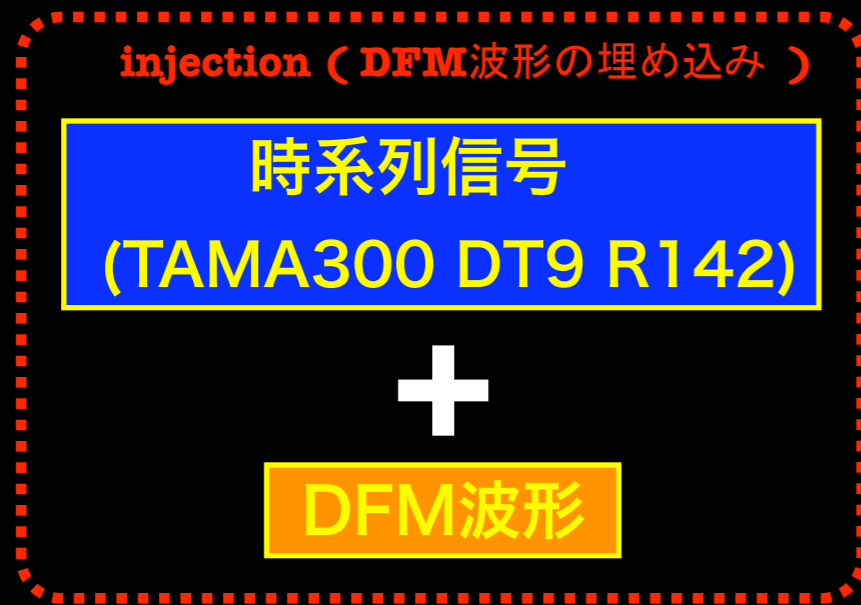


3. ウェーブレット変換

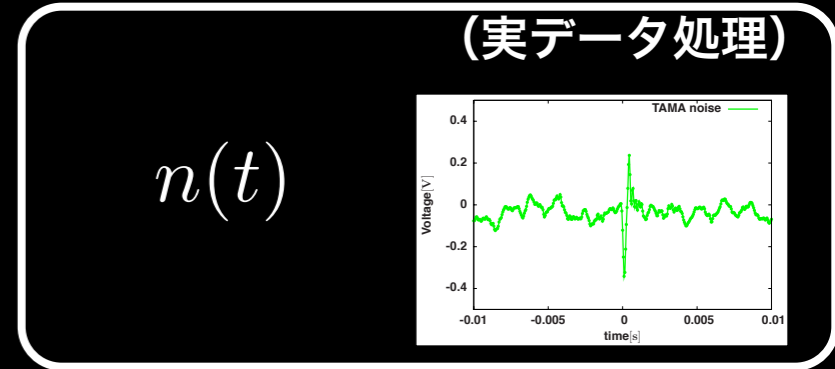
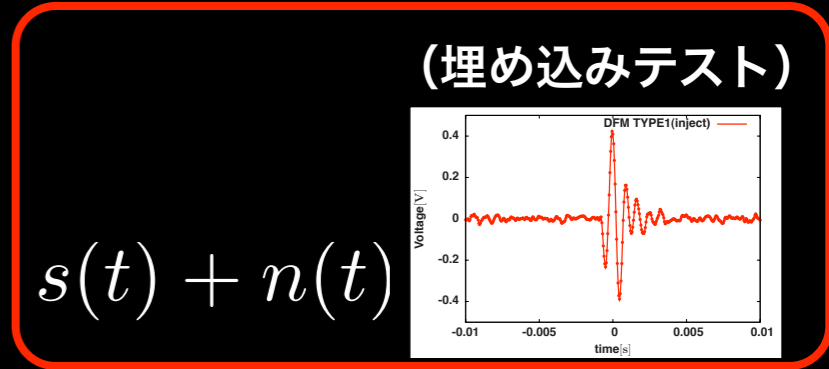




解析の流れ



..... $v(t) =$ {



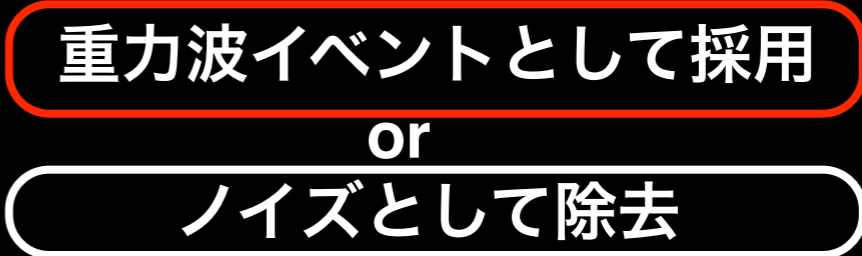
$s(t)$: 重力波信号
 $n(t)$: TAMAデータ



..... $v(t) \rightarrow \check{v}(t, f)$

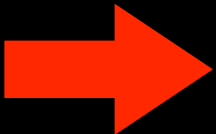


..... $\mu_{t,w}, \mu_{t,f}, \sigma_{t,w}, \sigma_{t,f} \dots$





目次

1. 重力波
2. 重力波検出器 TAMA300
3. ウェーブレット変換
-  4. TF (time-frequency) クラスタリング
5. イベント選別
6. まとめ



4.TF クラスタリング

クラスタリング (1つのイベントからなる信号領域の認識)

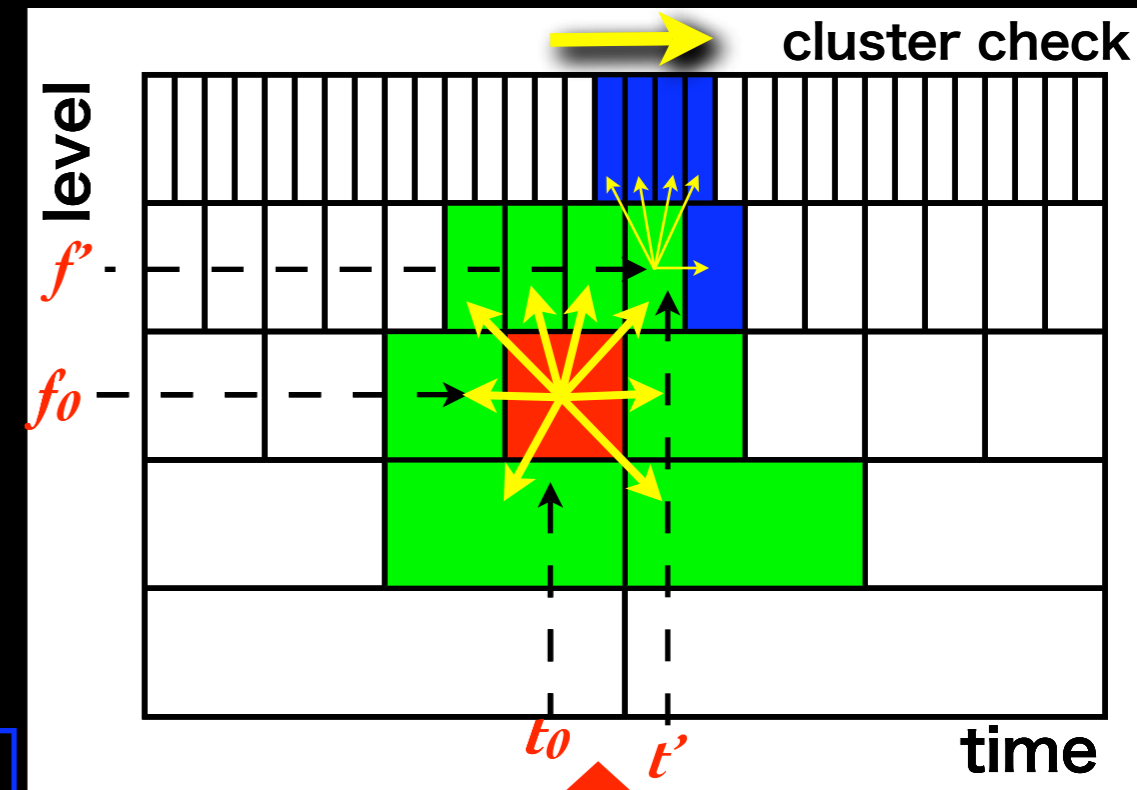
SN比 > 5のセルにおいて...

I. TF平面上で周辺のセルよりも大きなパワーを持つローカルピーク($\varepsilon(t_0, f_0)$)の抽出

II. ローカルピークを起点として隣接周囲8セルにおいて閾値($\sqrt{\varepsilon(t_0, f_0)}$)を越えているセルを抽出

III. IIで閾値を越えたセル($\varepsilon(t', f')$)を新たに起点とし、同様に隣接周囲8セルで閾値($\sqrt{\varepsilon(t', f')}$)を越えるセルを抽出

IV. 以降同様にクラスタ閾値を越えるものを抽出していき、それら全てのセルを接続させたものをクラスタと定義。



TFクラスタ

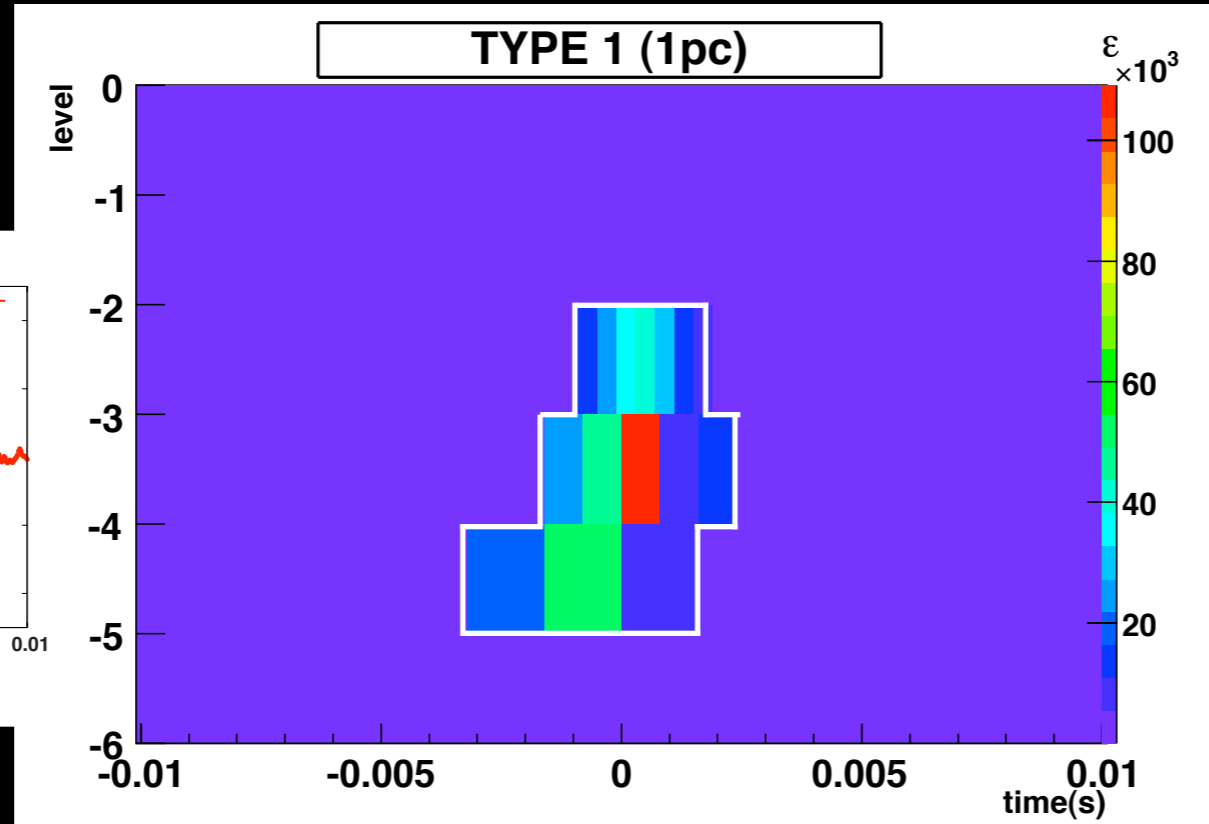
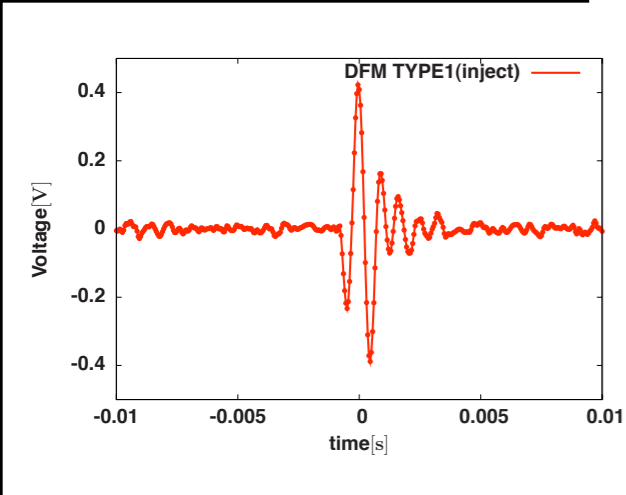
$$\varepsilon(t, f) : (\text{信号雑音比})^2$$

(フロアノイズレベルで規格化した信号パワー)



4.TF クラスタリング

DFM



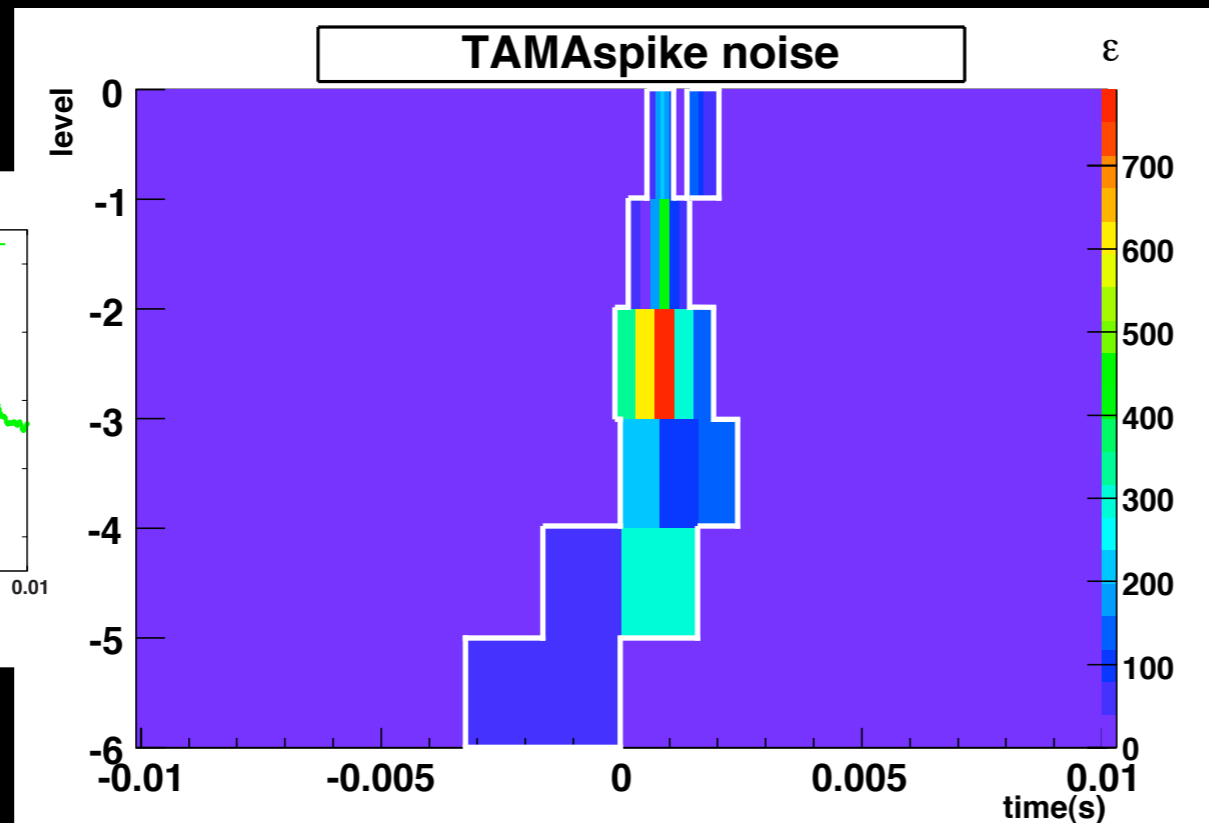
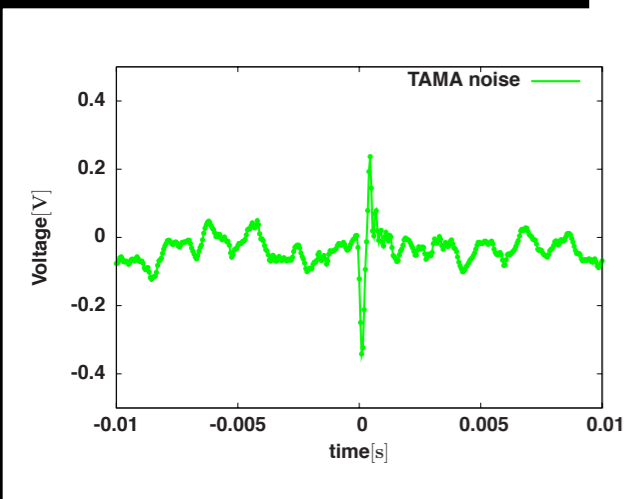
TFクラスタから得られる情報

- 信号のSN比
- クラスタパワー (パワーの総和)
- クラスタサイズ (セルの総数)
- イベントの開始時刻
- イベントの継続時間
- ピーク周波数帯
- 時間分布
- 周波数分布

etc . . .

↑ イベント選別パラメータとして採用

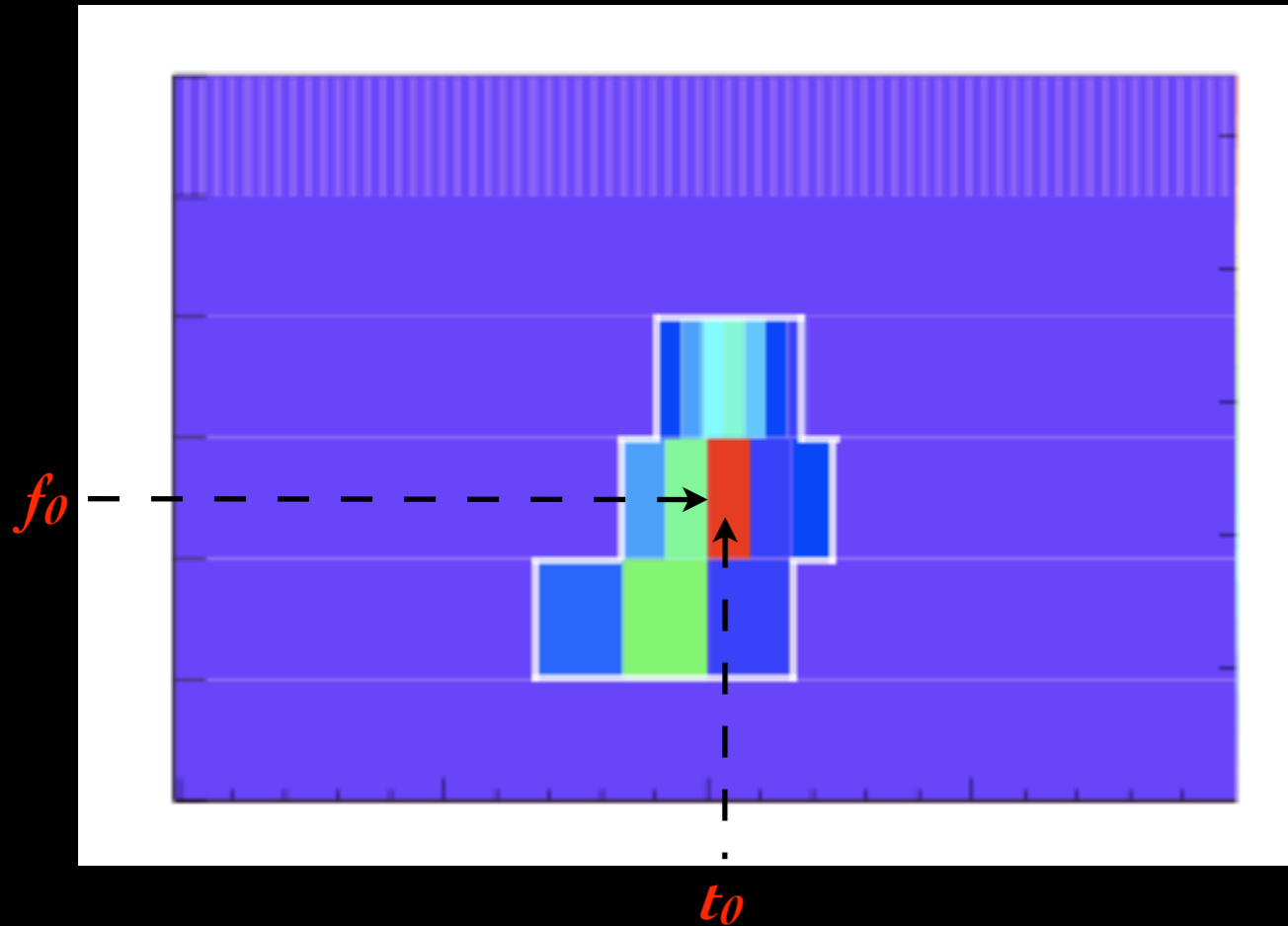
スパイクノイズ





4.TF クラスタリング

選別パラメータの定義



t_0, f_0 : ピーク時刻、周波数

$\epsilon_{i,j} \equiv \{ \check{v}(t_i, f_j) \}^2$: 信号パワー

$V \equiv \sum_{i,j \in \text{cluster}} \epsilon_{i,j}$: クラスタパワー

$$\mu_{t,w} \equiv \frac{\sum_{i,j \in C} (t_i - t_0) \epsilon_{i,j}}{V} \quad (\text{クラスタ重心の時刻})$$

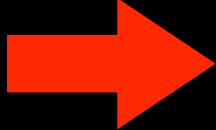
$$\mu_{f,w} \equiv \frac{\sum_{i,j \in C} f_j \epsilon_{i,j}}{V} \quad (\text{クラスタ重心の周波数})$$

$$\sigma_{t,w} \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i,j \in C} (t_i - \mu_{t,w})^2 \epsilon_{i,j}}{V}} \quad (\text{クラスタの時間幅})$$

$$\sigma_{f,w} \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i,j \in C} (f_j - \mu_{f,w})^2 \epsilon_{i,j}}{V}} \quad (\text{クラスタの周波数幅})$$



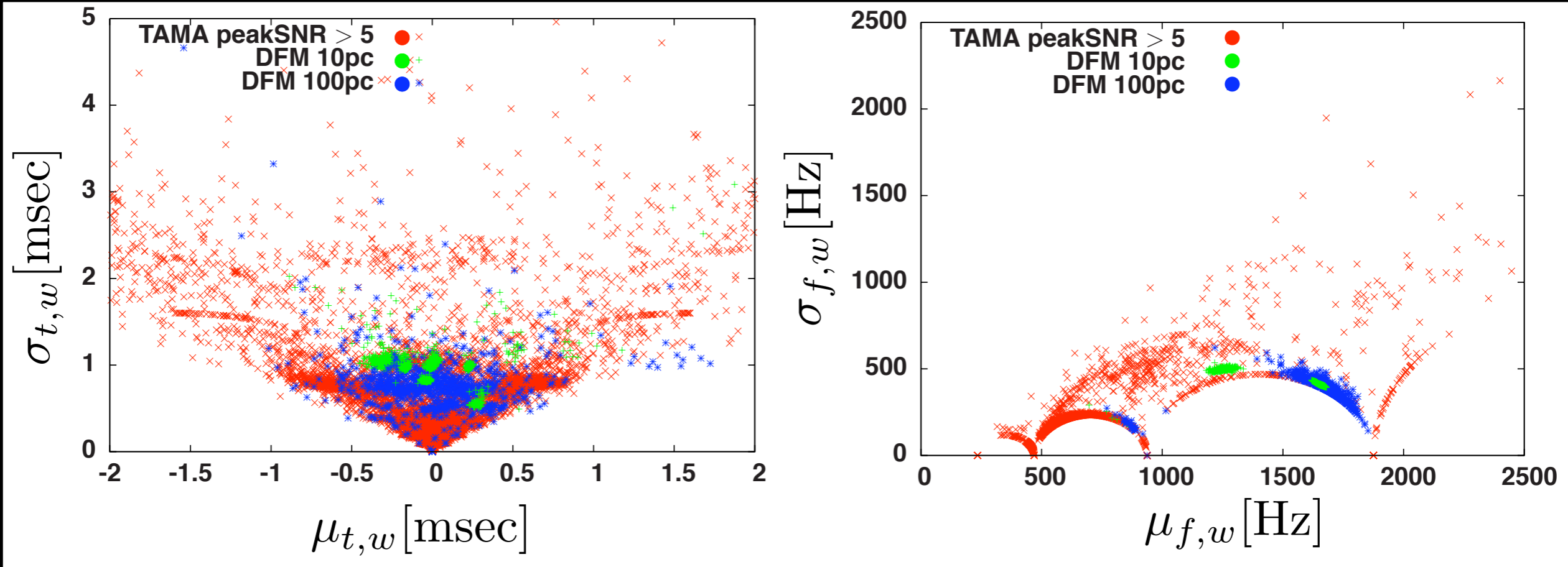
目次

1. 重力波
2. 重力波検出器 TAMA300
3. ウェーブレット変換
4. TF (time-frequency) クラスタリング
-  5. イベント選別
6. まとめ



5. イベント選別：ノイズ除去

- ランダムな時刻にDFM波形を距離を変えてTAMA 実データに埋め込む。



$$\mu_{t,w} \equiv \frac{\sum_{i,j \in C} (t_i - t_0) \epsilon_{i,j}}{V} \quad (\text{クラスタ重心の時刻})$$

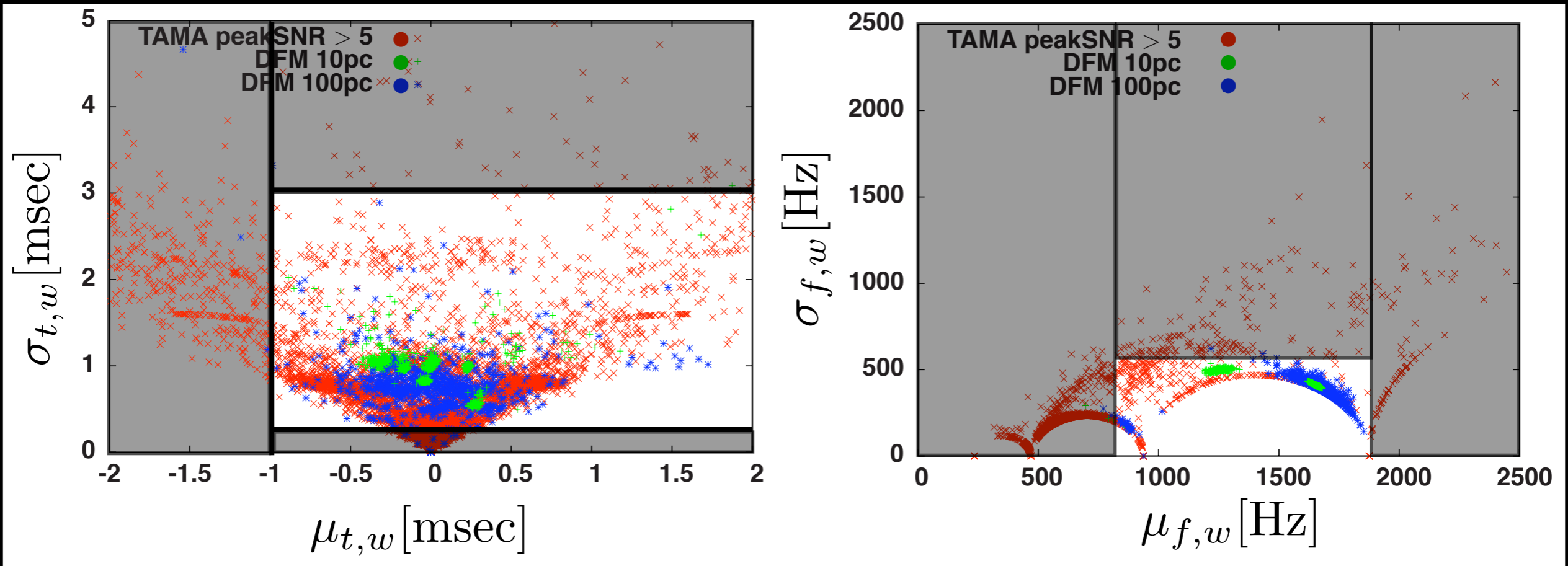
$$\mu_{f,w} \equiv \frac{\sum_{i,j \in C} f_j \epsilon_{i,j}}{V} \quad (\text{クラスタ重心の周波数})$$

$$\sigma_{t,w} \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i,j \in C} (t_i - \mu_{t,w})^2 \epsilon_{i,j}}{V}} \quad (\text{クラスタの時間幅})$$

$$\sigma_{f,w} \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i,j \in C} (f_j - \mu_{f,w})^2 \epsilon_{i,j}}{V}} \quad (\text{クラスタの周波数幅})$$

5. イベント選別：ノイズ除去

選別条件



$$-1 < \mu_{t,w}$$

$$0.25 < \sigma_{t,w} < 3$$

$$800 < \mu_{f,w} < 1875$$

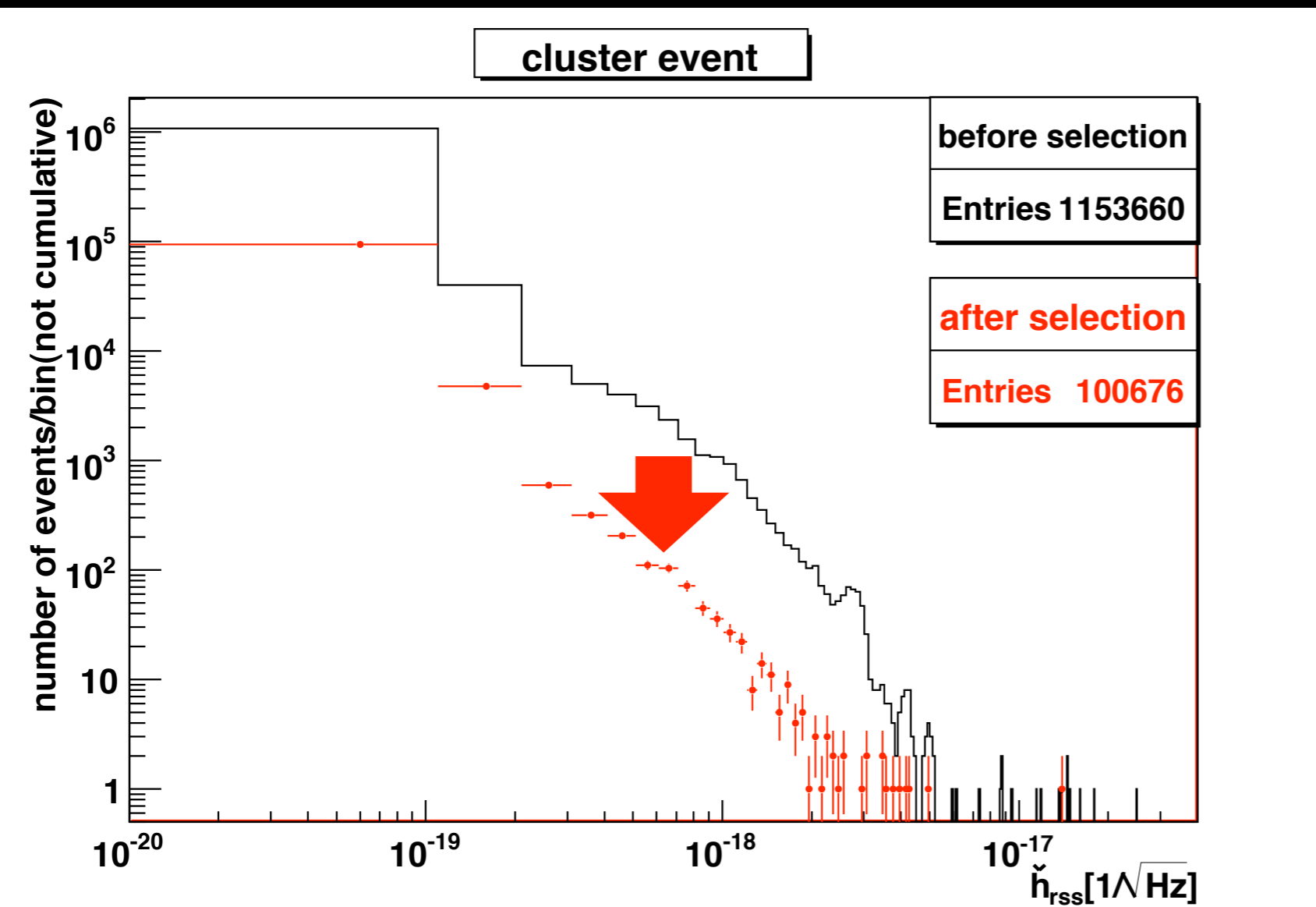
$$\sigma_{f,w} < 600$$

level 2~3 → 1250~2500Hz
1875Hz (central frequency)



5. イベント選別：ノイズ除去（実データ処理）

TAMA300 DT9データ 1.3×10^5 秒で評価（36時間）



rss振幅：信号の大きさの指標

h_{RSS} : Root-Sum-Square振幅

$$h_{RSS} = \sqrt{\int h(t)^2 dt} \quad [1/\sqrt{\text{Hz}}]$$

予想振幅（銀河中心イベント）

$$h_{RSS} = 4 \times 10^{-22} [1/\sqrt{\text{Hz}}] @ 8.5\text{kpc}$$

ノイズを一桁近く落とすことに成功

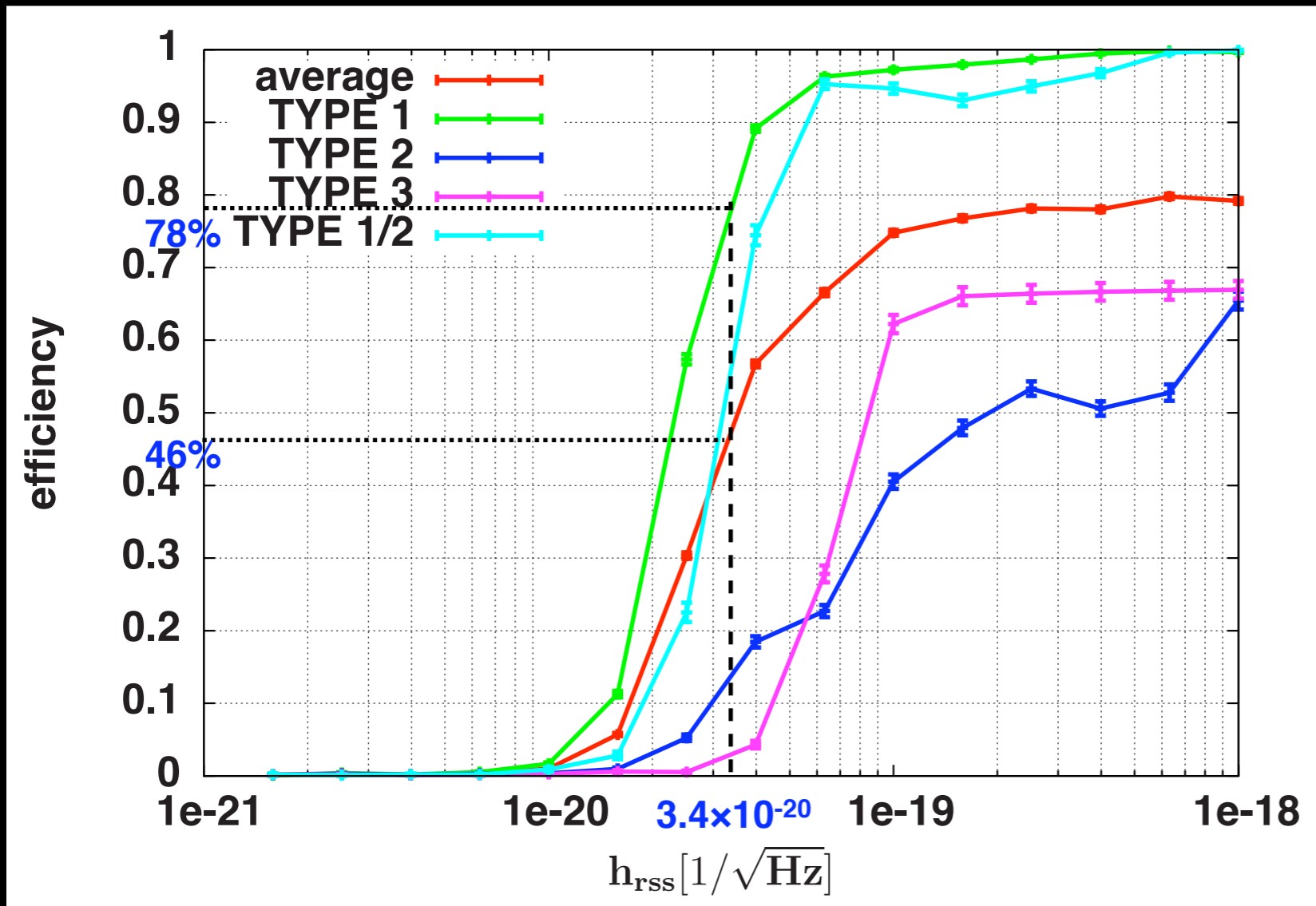
(\check{h}_{RSS} : ウェーブレット変換後の $\check{v}(t_i, f_j)$ から計算したrss振幅)



5. イベント選別：評価（信号埋め込みテスト）

h_{rss} vs 検出効率

TYPE1 : TYPE1 DFM波形のみの平均
 average: 全波形での平均



$$\text{検出効率} = \frac{\text{選別後のクラスタ検出数}}{\text{DFM埋め込み数}}$$

• $h_{\text{rss}} = 3.4 \times 10^{-20}$ (100pc)
 全体で46%
 TYPE 1では78%

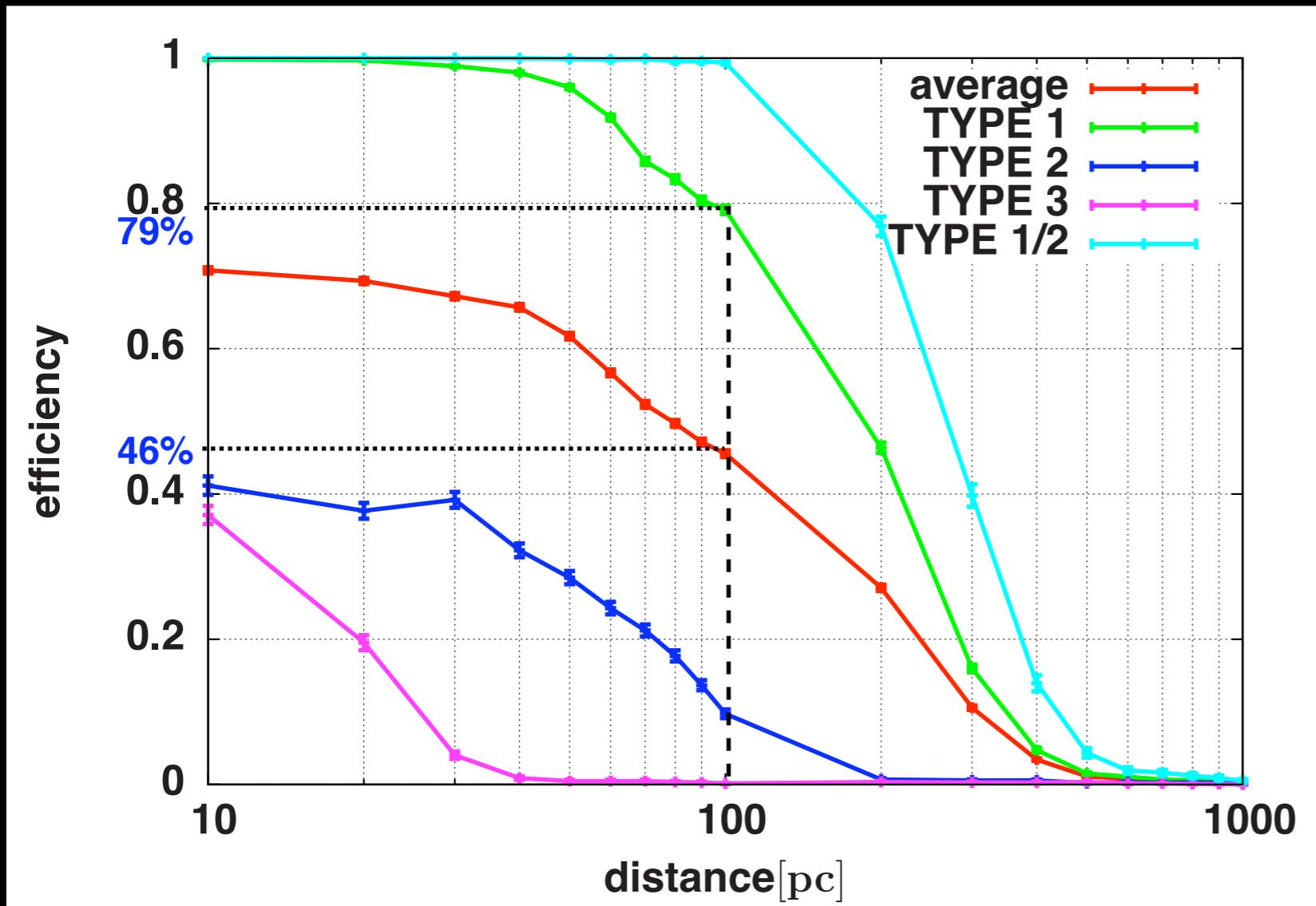
$$h_{\text{rss}} = 4 \times 10^{-22} [1/\sqrt{\text{Hz}}] @ 8.5\text{kpc}$$



5. イベント選別：評価（信号埋め込みテスト）

h_{rss} vs 検出効率

TYPE1 : TYPE1 DFM波形のみの平均
 average: 全波形での平均



• 検出可能距離
 検出効率50%では・・・
 全体で82pc
 TYPE 1では186pc
 まで検出可能

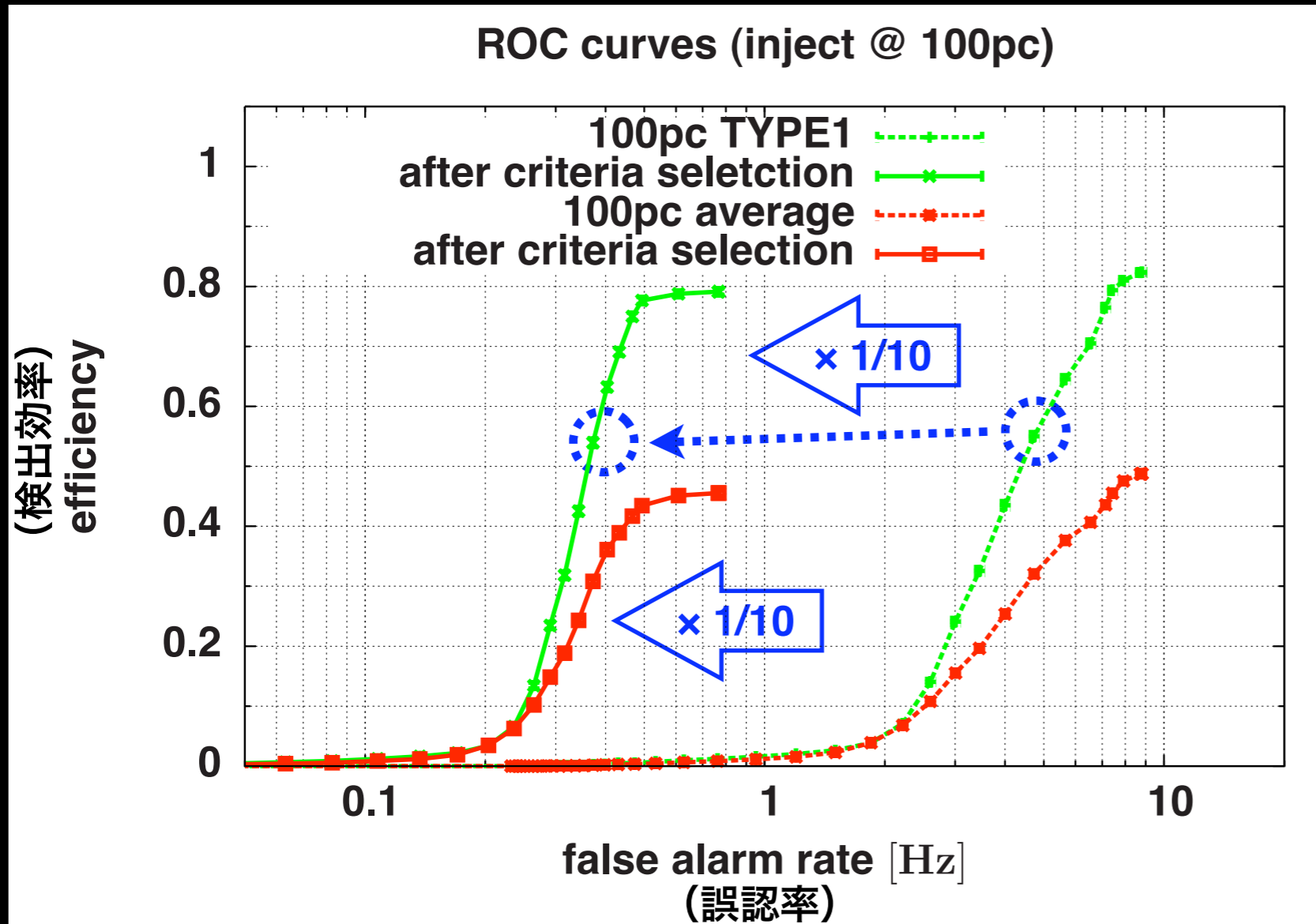
• 100pc
 全体で46%
 TYPE 1では79%



5. イベント選別：評価とノイズ除去

- 100pcDFM波形に対する選別前後での検出効率とノイズ除去率

\check{h}_{RSS} の値でイベント選別してノイズ誤認率、検出効率をプロット



$$\text{誤認率} = \frac{\text{ノイズ検出数}}{\text{探索時間}}$$

$$\text{検出効率} = \frac{\text{選別後のクラスタ検出数}}{\text{DFM埋め込み数}}$$

	選別前	選別後
検出効率	51.6%	50.6%
誤認率	4.57Hz	0.36Hz

ノイズを一桁近く落とすことに成功

検出効率は保たれている



6.まとめ

- TFクラスタリングとウェーブレット変換を用いたバースト重力波の選別手法を開発した。

TFクラスタの認識

時間、周波数方向に関する選別パラメータを導入。

DFM波形による解析手法のテスト

バースト重力波に対する検出効率を保ちつつノイズを1桁近く落とすことに成功した。

今後

選別パラメータ、選別条件の改良 → TYPE2,TYPE3でも高い検出効率を目標





X.Data Conditioning

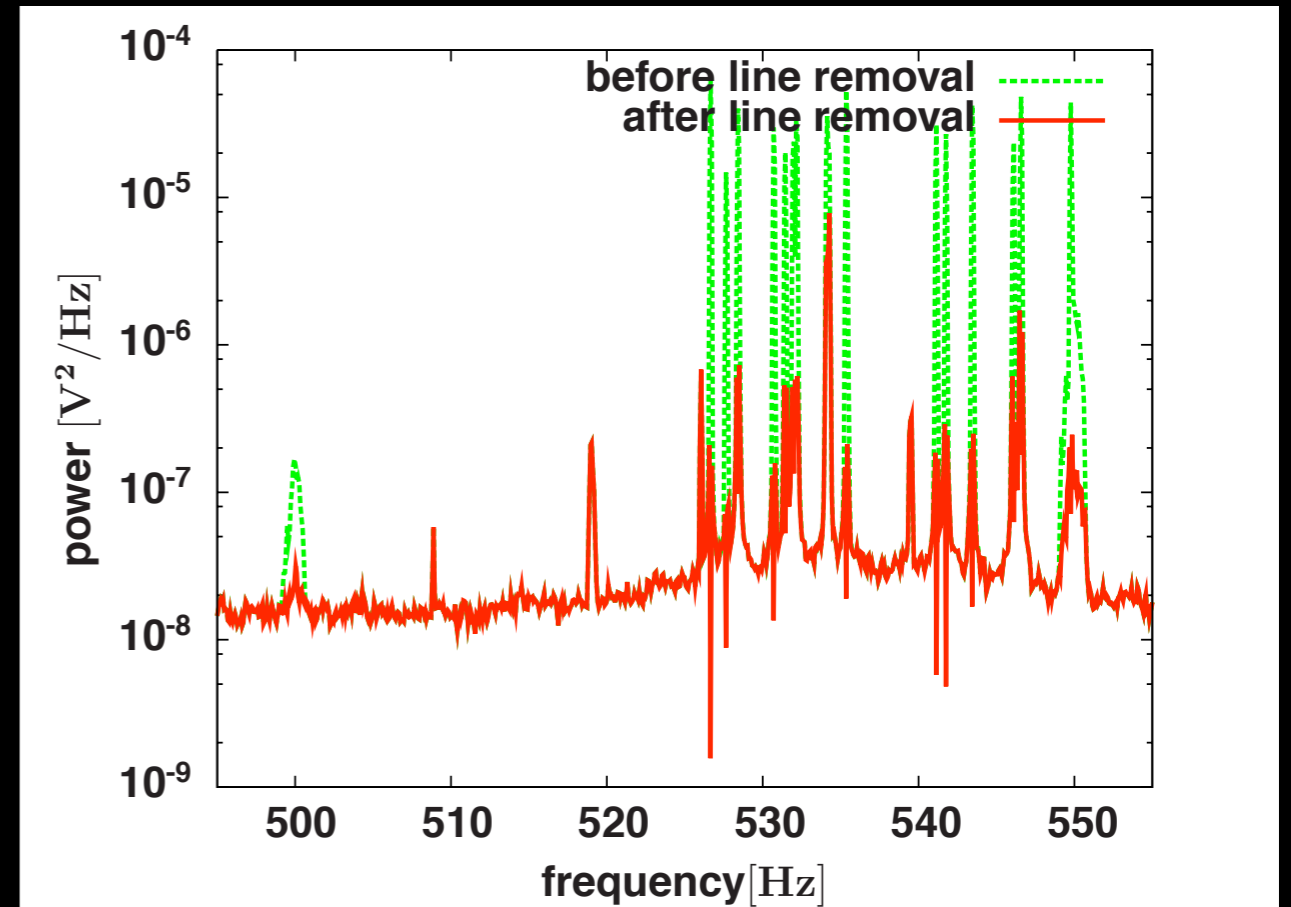
ライン除去

・ 除去対象 :

電源雑音 (50×n Hz)

バイオリン雑音 ((520-550) × n Hz)

校正信号 (625 Hz)



ホワイトニング

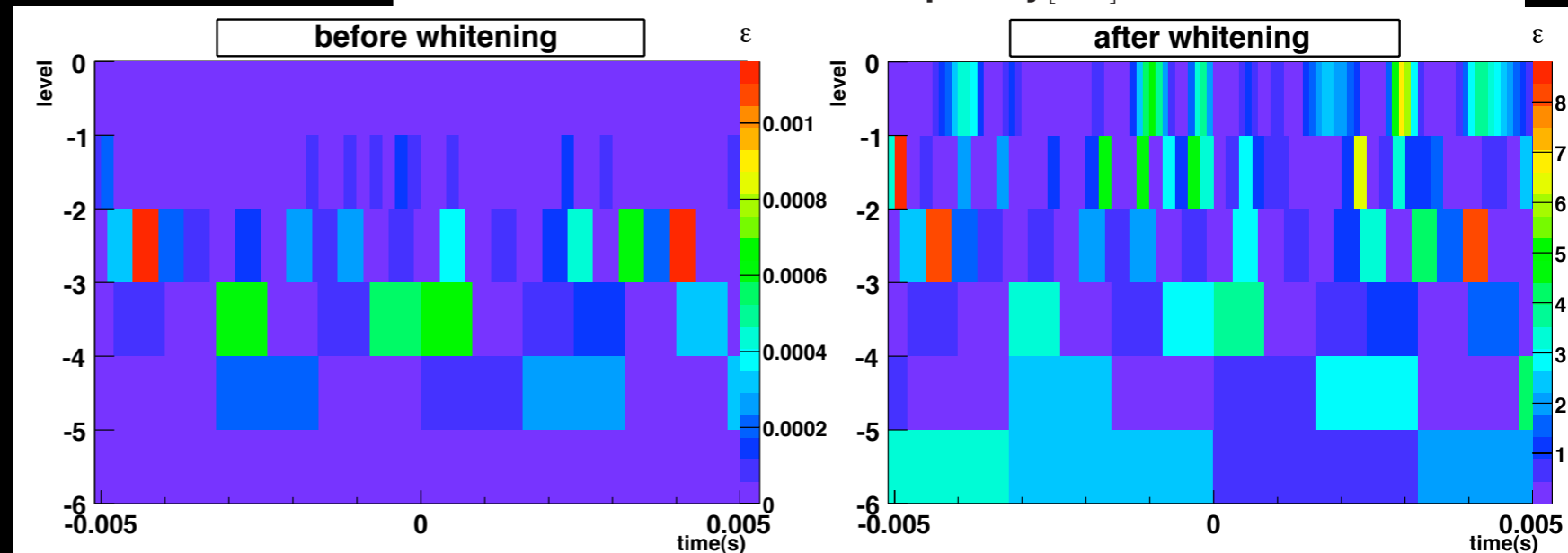
各周波数帯でパワーを規格化

$$\mathcal{E}(t, f) = \left\{ \frac{\check{v}(t, f)}{\sigma(f)} \right\}^2 = (\text{SNR})^2$$

$$\sigma(f)^2 \sim 1.44427 \times \mathcal{M}$$

SNR: 信号雑音比

\mathcal{M} : 分布の中央値



全周波数帯でSNRは~1に規格化された



X. イベントレート

全天10pc以内でのバースト重力波のイベントレート

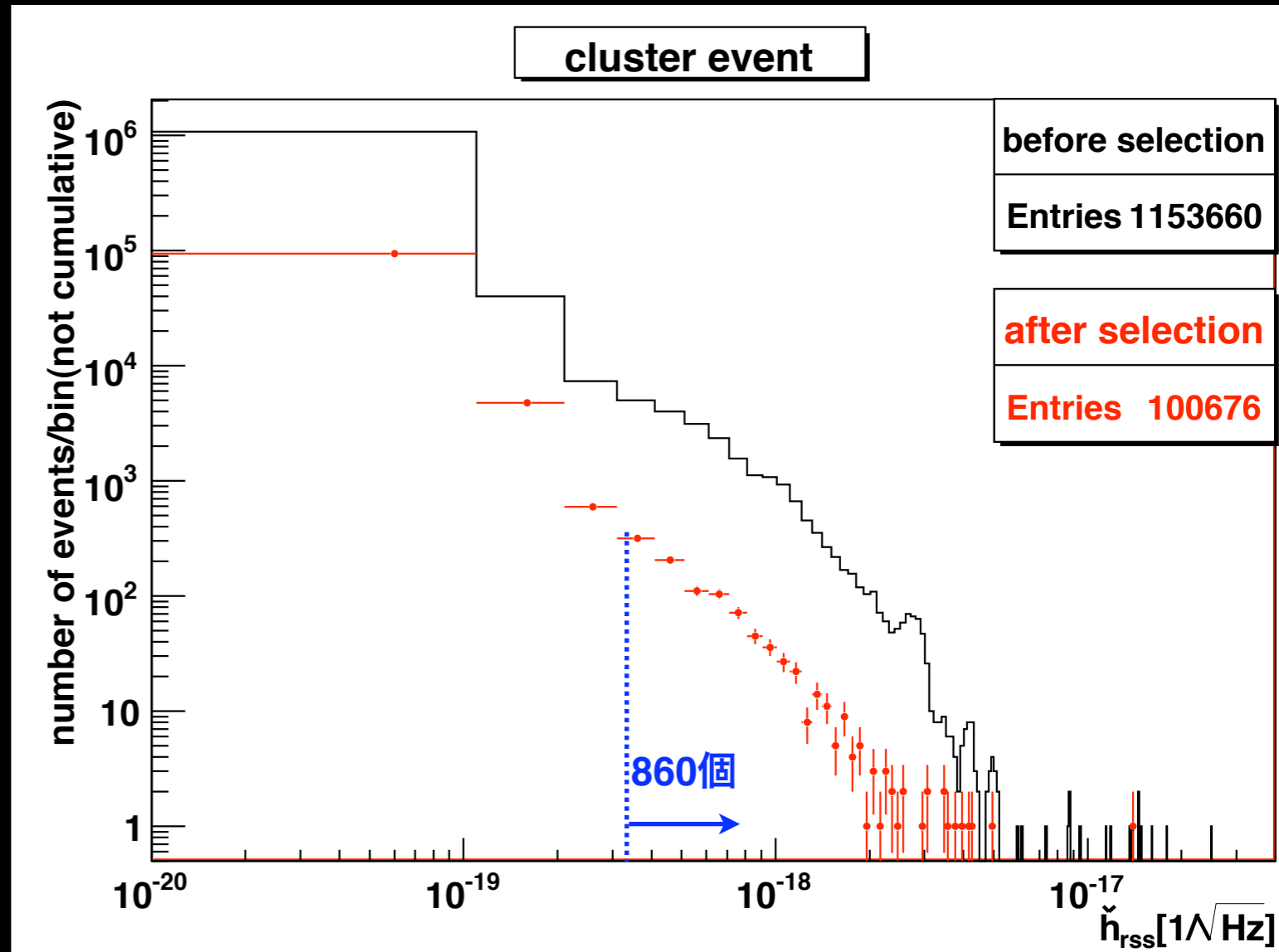
$$\check{h}_{rss} > 3.4 \times 10^{-19} [1/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (10\text{pc})$$

$$N = 860$$

$$T = 1.31 \times 10^5$$

$$\mathbb{E} = 78.2\%$$

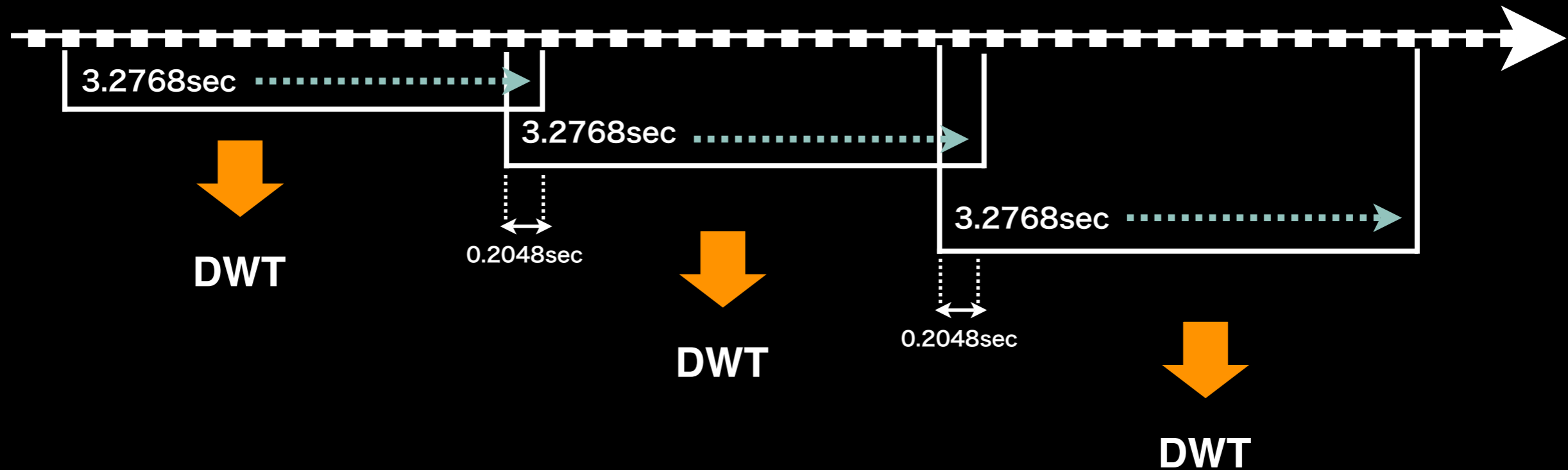
$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1} \frac{N}{\mathbb{E} \cdot T} = 1.9 \times 10^{-2} \text{ event/sec}$$





X.TF変換

変換する時系列の”切れ目”の設定



chunk size : 3.2768sec($N=2^{16}$)
 chunk overlap : 0.2048sec($N=2^{12}$)

N : sample points

- ”切れ目”でのイベントの取りこぼしを防ぐ。
- ”切れ目”でのイベントの重複を防ぐ。