

coil-magnet actuator の熱雑音

山元 一広

1 はじめに

Coil-actuator の抵抗で生じた熱電流が actuator を介して鏡を揺らす雑音と鏡が動いて coil に起電力が生じ、それによる電流が抵抗を通ることによる散逸によって生じる熱雑音は同じ現象を異なる言い方をしたにすぎないことに注意¹。

2 運動方程式

Coil-magnet actuator を N 個つけた振り子の (周波数領域の) 運動方程式は以下の通りである。話を簡単にするため振り子自体は散逸を持たず actuator 以外の外力も考えない。Coil-magnet actuator はそれぞれ独立とする。

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2)\tilde{x} = N\alpha\tilde{I} \quad (1)$$

α, I は coil-magnet actuator の効率 [N/A] と一つの coil に流れる電流である。回路に関する方程式は (driver output voltage は無視)

$$Z\tilde{I} + i\omega\alpha\tilde{x} = 0 \quad (2)$$

Z は coil につながれた回路の合成 impedance と coil 自身の impedance の和である。前者は大抵 actuator driver の output impedance で決まる。後者は大抵の場合 coil の内部抵抗である。これまた大抵前者の方が大きいのでまあ driver output impedance と考えればよい。 α を含む項は記憶に頼っているが単位があっているのたぶん正しい。上記 2 つの方程式から

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2) + i\frac{N\alpha^2\omega}{Z}\tilde{x} = 0 \quad (3)$$

話を簡単にするため Z は resistance のみからなるとする。以下では $Z = R$ とする。すると coil-magnet actuator による Q は

$$Q = \frac{m\omega_0 R}{N\alpha^2} \quad (4)$$

共鳴より高い周波数での熱雑音のパワースペクトル密度 G は

$$G = \frac{4k_B T \omega_0}{m\omega^4 Q} = \frac{4k_B T N \alpha^2}{m^2 \omega^4 R} \quad (5)$$

となる。なお Michelson で calibration したときに得られる値は $\alpha/m\omega^2$ に電圧電流変換係数をかけたものであり、かつ $\alpha/m\omega^2$ に熱雑音の振幅は比例するのでこれで規格化しておくとも便利かもしれない。

¹昔 LIGO でこの両者を計算してなぜ同じなのだろうと不思議に思ったという人たちがいるという逸話を聞いたことがある。

3 CLIO の場合

以下の仮定を置く。

- 一つの鏡の actuator を考える。他の鏡にはついてないか、coil の両端が open になっている。
- 振り子の共鳴周波数は 0.7 Hz とする。
- 4 つの coil があり、coupling は $\alpha = 10^{-3}\text{N/A}$ とする。
- R は 50Ω とする²。

よって

$$Q = 10^8 \left(\frac{m}{1.9\text{kg}} \right) \left(\frac{\omega_0}{2\pi 0.7\text{Hz}} \right) \left(\frac{R}{50\Omega} \right) \left(\frac{4}{N} \right) \left(\frac{10^{-3}\text{N/A}}{\alpha} \right)^2 \quad (6)$$
$$\sqrt{G} = 4.9 \times 10^{-20}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}} \left(\frac{T}{300\text{K}} \right)^{1/2} \left(\frac{N}{4} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha}{10^{-3}\text{N/A}} \right) \left(\frac{1.9\text{kg}}{m} \right) \left(\frac{50\Omega}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{100\text{Hz}}{f} \right)^2 \quad (7)$$

常温での CLIO の限界感度は 100Hz で $5 \times 10^{-19}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ であり、2008/4/25 の感度は $3 \times 10^{-18}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、2008/6/9 の感度は $1 \times 10^{-18}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ である。

4 CLIO に関する議論

通常 CLIO では問題にならないようであるが、いくつか考察すべき点があるので考えた。

4.1 coil の両端を short

少なくとも 2006 年の終わり頃、actuator の効率を下げるために actuator の coil に 1Ω の抵抗を並列につなげることをやっていた。これは coil から見ると driver の両端を 1Ω で short したことに等しい。つまり driver の output impedance が 1Ω になったかのように見える。実際には driver までの線はそれなりに長いので 7Ω くらいあるので、 $R \sim 8\Omega$ 程度になったように見える。つまり上記の式の 2,3 倍程度になる。それでもまあ問題はない。

4.2 coil holder

Coil holder はアルミで出来ているので、ここで生じる eddy current が問題になる可能性がある。Coil-magnet actuator の coil の外側に別の coil(但し 1 巻き) が存在することに相当する。Coil holder の影響の絶対的な大きさを計算するのはやっかいなので、ここでは actuator の coil との比を考えることにする。但し話を簡単にするため、actuator の coil の両端は完全に short されているとする。つまり上記の式の R は coil の内部抵抗のみを考慮するとする。Actuator の coil と holder の違いは α と内部抵抗 R の違いなのでそれらをそれぞれ考える³。

²driver output impedance はこれくらい？

³本当は coil 同士の相互作用を考えなければいけない気がするが無視。

4.2.1 α

まず話を簡単にするために actuator の coil も 1 巻きとしよう。 α は回路の方程式からわかるように、振り子の速度と coil の両端で発生する起電力の比例係数である。起電力は coil の内側の磁束の変化率に比例する。このため α は coil の径に依存しない。磁石の軸の方向の長さへの依存性は難しく、かつそれほど actuator の coil と holder で変わるわけではないのでここでは考えない。よって幾何学的形状に α は依存しない。問題は actuator の coil は通常 1 巻きではないということである。話を簡単にするために、外形は 1 巻きのとときと変わらず巻き数が n になったとする。1 巻き coil が直列に接続していることになり、1 巻き当たりの起電力は変わらないので、巻き数 n の分だけ coil-magnet actuator の方が起電力、すなわち α が大きいことになる。今までの議論をまとめると

$$\alpha \propto n \quad (8)$$

となる。

4.2.2 R

まず 1 巻き coil を考える。内部抵抗 R は coil の半径 r に比例し、断面積 (coil の内径と外径の差と長さの積) a に反比例する。電気伝導率 ρ_{el} に比例することにも注意。外形を 1 巻きのとときと変えず n 巻きにしたとすると、coil 全体の導線の長さが n 倍になり、導線の断面積が $1/n$ 倍になるので n^2 倍になる。以上の議論をまとめると

$$R = \frac{\rho_{el} 2\pi r n^2}{a} \quad (9)$$

となる。

4.2.3 熱雑音

以上の議論から熱雑音は

$$\sqrt{G} \propto \frac{\alpha}{\sqrt{R}} \propto \sqrt{\frac{a}{\rho_{el} r}} \quad (10)$$

となる。Actuator coil と coil holder の最大の違いである n が相殺されていることに注意。残った parameter は coil の外形と電気伝導率だけであるが、これは actuator coil と coil holder で桁違いに異なるわけではなく、さらに平方根の中に入っているので、結局 coil holder の影響は actuator coil の両端を short したときとそれほど差が無いということになる。

計算してみた。まず coil holder の方から。材質はアルミ (電気伝導度は $2.5 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$) であり、内径が 24mm、外径 30mm、光軸方向の長さが 20 mm 程度であるので

$$\sqrt{\frac{a}{\rho_{el} r}} = \sqrt{\frac{[(30 - 24)/2] \text{mm} \times 20 \text{mm}}{2.5 \times 10^{-8} \Omega \text{m} \times [(30 + 24)/2] \text{mm}}} = 4.2 \times 10^2 / \sqrt{\Omega} \quad (11)$$

一方 coil は直径 0.5mm の銅線 (電気伝導度は $1.55 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$) を 22 回巻いたもので、coil 自体の直径は 1cm なので

$$\sqrt{\frac{a}{\rho_{el} r}} = \sqrt{\frac{\pi(0.5 \text{mm}/2)^2 \times 22}{1.55 \times 10^{-8} \Omega \text{m} \times 10 \text{mm}/2}} = 2.4 \times 10^2 / \sqrt{\Omega} \quad (12)$$

となり、coil holder による熱雑音は、coil の両端を short したとき coil によって生じる熱雑音と同じ order である。

では coil による熱雑音を計算してみよう。式 (7) から計算できるが、 R は coil の内部抵抗となる。計算すると

$$1.55 \times 10^{-8} \Omega \text{m} / \pi / (0.5 \text{mm} / 2)^2 \times (\pi 10 [\text{mm}]) \times 22 = 55 \text{m}\Omega \quad (13)$$

となる。一方感度改善前 (2008/4/25) の CLIO の実際の α は式 (7) より大きめであり $2.6 \times 10^{-3} \text{N/A}$ であった。これらから 100Hz で $3.8 \times 10^{-18} \text{m} / \sqrt{\text{Hz}} @ 100 \text{Hz}$ となる。これは感度改善前 (2008/4/25) にほぼ等しく、あまり精度の高い計算でないこと、coil holder を除去したら感度が向上した (2008/6/9) ことを考えると、改善前は coil holder の熱雑音で感度が制限されていた可能性が高い。

4.2.4 参考文献

Coil-magnet actuator の近くにある導体内部の eddy current については以下のような reference がある。特に最初の reference を参考にすれば、(両端を short した) coil actuator と holder の影響の比を厳密に計算することが可能である。

- G. Cagnoli *et al.*, Rev. Sci. Instrum. 69 (1998) 2777.
- S. Frasca *et al.*, Phys. Lett. A 252 (1999) 11.

4.3 低温

低温にした場合温度自体もさることながら coil や holder の抵抗が変わることも考慮する必要がある (といっても coil の場合は直列に常温にある抵抗とつながっているのも問題となるのは全体が完全に冷却される holder のほうであろう)。上記の式によると \sqrt{R} に熱雑音は反比例する。しかし注意する必要があるのは上記の式は coil の inductance を無視しているということである。冷却すると R が小さくなるが、 R がある程度小さくなると coil の inductance が効き始め、熱雑音は \sqrt{R} に比例するようになる。というわけであまりにも R が小さいときはこのことを考慮する必要がある。

実際に計算してみた。式 (3) の Z は

$$Z = R + i\omega L \quad (14)$$

となる。 L は coil の自己 inductance。これを用いて熱雑音を計算すると

$$G = \frac{4k_B T N \alpha^2 R}{m^2 \omega^4 (R^2 + \omega^2 L^2)} \quad (15)$$

となる。 $L \rightarrow 0$ もしくは $\omega \rightarrow 0$ で式 (5) と一致し、 $R \rightarrow 0$ もしくは $\omega \rightarrow \infty$ で

$$G = \frac{4k_B T N \alpha^2 R}{m^2 \omega^6 L^2} \quad (16)$$

となる。つまり \sqrt{G} は \sqrt{R} に比例する。式 (5) と式 (16) が成立する範囲の境界の周波数は

$$\frac{R}{2\pi L} \quad (17)$$

となる。この値を計算してみる。 L は

$$L = \frac{\mu_0 n^2 S}{l} \quad (18)$$

である。 S, l は coil の断面積（コイルと同じ半径をもつ円の面積）と長さである。よって

$$\frac{R}{2\pi L} = \frac{\rho_{el} r l}{\mu_0 a S} \quad (19)$$

となる。また巻き数 n は相殺されたことに注意。Coil について計算してみると

$$\frac{1.55 \times 10^{-8} \Omega \text{m} \times (10/2) \text{mm} \times 0.5 \text{mm} \times 22}{4\pi 10^{-7} \text{H/m} \times \pi (0.5 \text{mm}/2)^2 \times 22 \times \pi (10 \text{mm}/2)^2} = 2 \text{kHz} \quad (20)$$

である。Coil holder は

$$\frac{2.5 \times 10^{-8} \Omega \text{m} \times ((30 + 24)/2/2) \text{mm} \times 20 \text{mm}}{4\pi 10^{-7} \text{H/m} \times ((30 - 24)/2) \text{mm} \times 20 \text{mm} \times \pi ((30 + 24) \text{mm}/2/2)^2} = 1.6 \times 10^2 \text{Hz} \quad (21)$$

となる。Holder の方が径自体や外径と内径の差が大きいが効いている。

CLIO では coil holder は最終的には 4K 程度まで冷却される。通常金属は低温のほうが電気抵抗が小さい。式 (5) を見ると熱雑音の振幅は $\sqrt{T/R}$ に比例するので、もし 4K の抵抗が常温の 1/100 倍以下であると、冷却したことによってかえって熱雑音が大きくなってしまふ。しかし式 (5) と (16) の境界の周波数は上記の計算より観測帯域 (100Hz 付近) と比べてそれほど高いわけではない。そして 4K にして R が小さくなるとこの周波数は小さくなり、もし R が常温の 1/100 以下になれば観測帯域よりずっと小さくなる。つまり \sqrt{TR} に比例することになる。温度が下がって 4K になっていることも考慮すれば、抵抗が常温の 1/100 以下になっても観測帯域では熱雑音は常温より小さい。

以上のことから熱雑音対策として

- 合金を用いて低温になっても R が小さくならないようにして \sqrt{T} だけ熱雑音を下げる。低温での熱伝導率のことを考慮する必要あり。
- pure Al を用いて低温になったら R が極端に小さくなるようにする。 \sqrt{T} 以上の低減が期待できる。工作できるか検討の必要あり（やわらかいから）。

が考えられる。

留意すべきこと

- 中間 mass の damping が低温で弱いという問題があるが、これも中間 mass の内部抵抗が小さくなって inductance が効き始めているせいかもしれない。要検討。
- LCGT ではさらに熱雑音低減のための工夫が必要

下記の web

- <http://metal.matdb.jp/JAA-DB/AL02S2100.cfm>

によると種類にもよるがアルミ合金の 4K の抵抗は常温より factor から 1/10 程度小さいようである。Pure Al だと 1/1000 以下になることもある。