

差動演算コイルの作成及び基礎特性の測定（コンデンサーをどこに入れるか）

東京大学理学系研究科天文学専攻 M1 チン タン

2010/9/15

1 目的と概要

今、次のような差動コイルとその回りの回路を作っている。

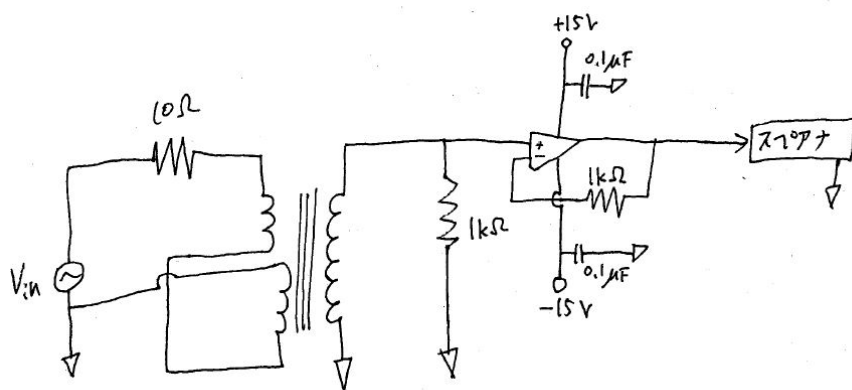


図 1: コイルの測定に使用した回路

今回は SN 比を上げるためにコンデンサーをコイルと並列に入れる。入力の方の二つのコイルに並列に入れるか、出力コイルに並列に入れるか、どちらに入れたほうが、SN 比が上がるかを知りたい。

まずは計算をしてみた。その後に実際にコンデンサーを並列に入れて、ノイズを測定した。

2 熱雑音（ジョンソンノイズ）

2.1 LC 回路のインピーダンス

まずは熱雑音のない LC 回路がどのような特性があるのかをみる。つまり、インピーダンス Z をみてる。インピーダンスとは抵抗 R を複素数にしたようなもので周波数に依存してくる。

以下のような回路を考える。

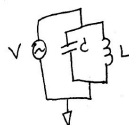


図 2: LC 回路

このときのコンデンサー、コイルのインピーダンス Z_c, Z_L をそれぞれ求める。入力電圧は実際は $V_0 \cos(\omega t + \phi)$ であるが、これを計算しやすいように複素数に $V_0 e^{i\omega t}$ と拡張する。なおここでは拡張したことで V_0 も $i\phi$ を含んで複素数になった。

まずはコンデンサーに関して、

$$Q = CV \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (2)$$

$$I = C \frac{d}{dt}(V_0 e^{i\omega t}) \quad (3)$$

$$= i\omega CV \quad (4)$$

$$\rightarrow Z_c = \frac{1}{i\omega C} \quad (5)$$

となる。次にコイルに関して、

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (6)$$

$$\rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{L} \quad (7)$$

$$\rightarrow I = \frac{V}{i\omega L} \quad (8)$$

$$\rightarrow Z_L = i\omega L \quad (9)$$

となる。これより、回路ではこのふたつは並列になっているから、合わせたインピーダンス Z は

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_L} \quad (10)$$

$$= \frac{1 - \omega^2 CL}{i\omega L} \quad (11)$$

$$\rightarrow Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL} \quad (12)$$

となる。この絶対値 $|Z|$ と位相 ϕ を取り出してくると、

$$|Z| = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL} \quad (13)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

$|Z|$ をグラフにすると、

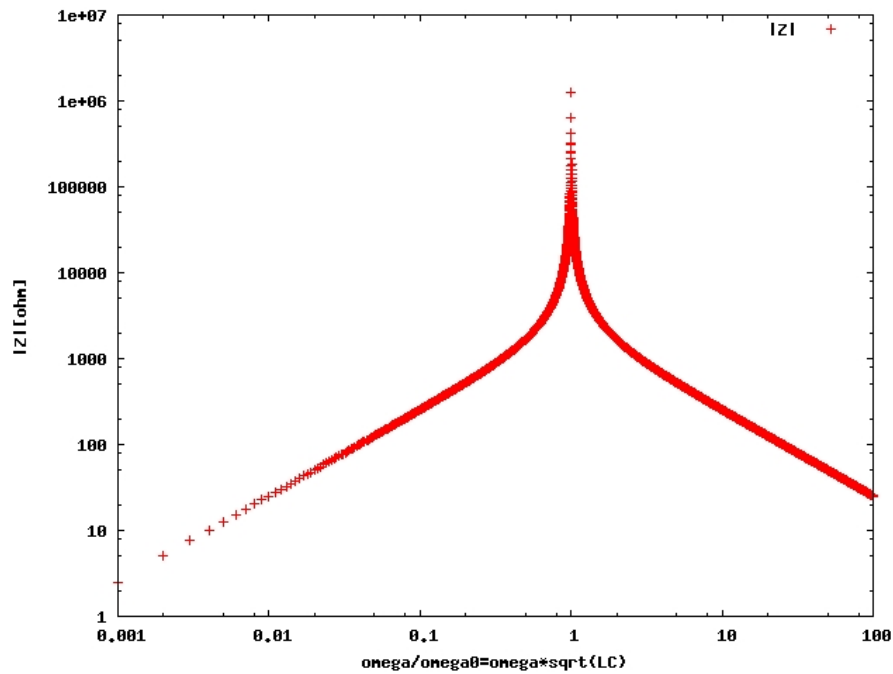


図 3: Z の大きさ横軸は $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ で規格化した

となる。共振させるためにはいくらの C を使えばよいのだろうか。実際に V でゆらすのは $100kHz$ である。(インジェクション電圧) これより $\omega = 2\pi f$ を使って ω を求めることができ、次のように C が求まる。

$$\omega^2 CL = 1 \quad (15)$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 \cdot (10^5)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} \quad (18)$$

$$= 6.3 \times 10^{-10} [F] \quad (19)$$

以下ではこのコンデンサーの値を使用する。

待てよ、なぜ共振させるの？その答えは、SN 比をあげるためである。まずは時間軸で見てみる。

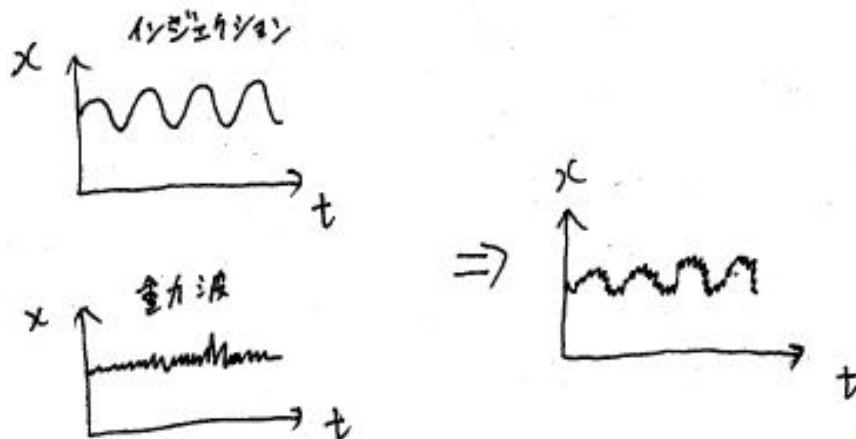


図 4: インジェクション電圧に重力波の信号がのったときの図 (時間変化)

インジェクション電圧はあるひとつの振動数で揺れているので、重力波の信号がきたときには、インジェクショ

ン電圧にのった形で観測される。これをフーリエ空間、つまり周波数で見ると次の様になる。



図 5: インジェクション電圧に重力波の信号がのったときの図 (フーリエ空間)

一つのピークだったものが、重力波信号がのることで、幅が出てくる。バンドパスフィルターを通すことで、このインジェクションで振った振動数の部分のみを抜き出してくると、ほかの振動数による雑音が減らせる。sonでもってこの部分を増幅させてあげればよいのでインジェクションの振動数に合わせた共振回路を作っている。(バンドパスフィルタは通していないが、共振回路自体がフィルタの代わりになっている?)

2.2 LCR 回路でのインピーダンス

これから L にロス (つまりなんらかの抵抗) があるとして、再び Z を計算する。すると、 Z は今度は無限大には発散しなくて、ある値でとまる。この値が熱雑音をあたえるのである。あとは明日、、ではなく明後日、、でもなく土曜がんばろう！レポートが早めに終わったの今日 (金曜) からやります。

以下のような回路を考える。

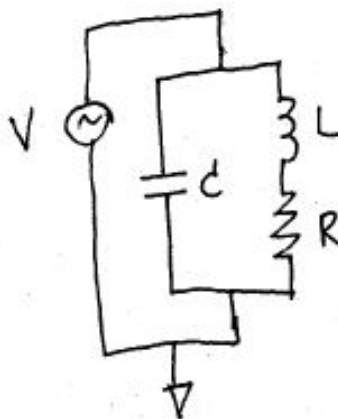


図 6: LCR の回路図。

この回路のインピーダンス Z を計算する。コンデンサー、コイルは上のままで、そこにコイルに直列に抵抗がつながっているだけであるのでインピーダンスは以下のように計算できる。

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L + R} + \frac{1}{Z_C} \quad (20)$$

$$= \frac{1 - \omega^2 LC + i\omega CR}{i\omega L + R} \quad (21)$$

$$\rightarrow Z = \frac{i\omega L + R}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR} \quad (22)$$

この Z の絶対値がもっとも大きくなるのはいくらか。この微分をとるのは面倒なのでとりあえず、計算してみた。

$$|Z| = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad (23)$$

より、次のように計算できた。

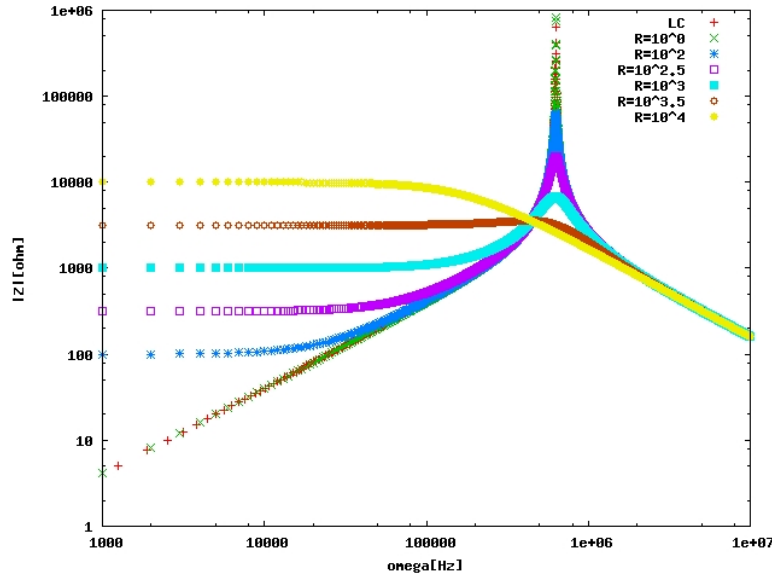


図 7: LCR 回路の場合の $|Z|$ 。R の値を変化させて計算を行った。

たしかに R を小さい値からあげていくと、LC 回路の場合と同じような形から、ピークが降りてきて、有限の値をとるようになる。この値を $Z_{max}(R)$ としよう。

2.3 熱雑音

詳しくは調べてないけど、熱が存在すると、以下のような雑音が存在するらしい。

$$V_{noise} = \sqrt{4k_B T R} \left(\left[\frac{V}{\sqrt{Hz}} \right] \right) \quad (24)$$

この式が示していることは、なんらかの抵抗 (散逸、ロス) があるときには、雑音が生じるということで、抵抗で考えれば、その大きさは $\sqrt{4k_B T R}$ となる。

今回の回路で考えてみる。まずは、入力側にコンデンサーを付けた場合には、二つの雑音源が生まれるが、出力側に付けた場合には雑音源はひとつである。この時の雑音がどれも同じ $N_{thermal}$ だとして、比較すると、入力側にコンデンサーを二つつけた方が $\sqrt{N^2 + N^2} / \sqrt{N^2} = \sqrt{2}$ だけノイズが大きくなる。

と考えたが、何か変な感じがする。コイルに散逸があると考えると、コンデンサーの有無に関係なく熱雑音が生まれる。そのときにコンデンサーを入力側に付けようが、出力側に付けようが、コイルが存在する限り熱雑音は変わらないということになる。この考えが正しければ、コンデンサーをどこに付け用が、雑音は変わらないはず。

3 実験結果 1

まずは、実際に使用する領域、100kHz 付近のノイズを測定した。コイルへの入力信号はなく、閉じた状態にした。

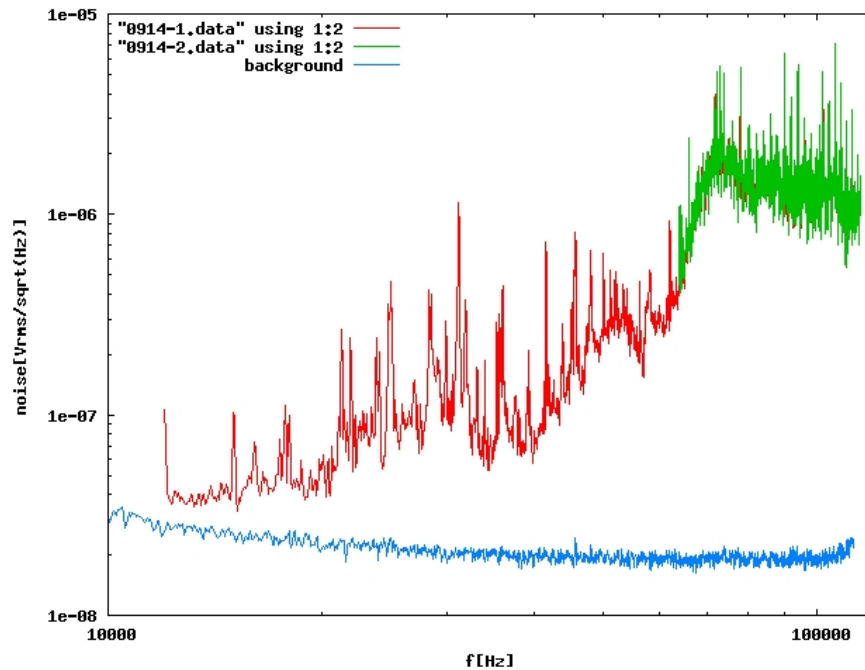


図 8: 10-114.4kHz のノイズ

もっと詳細に、

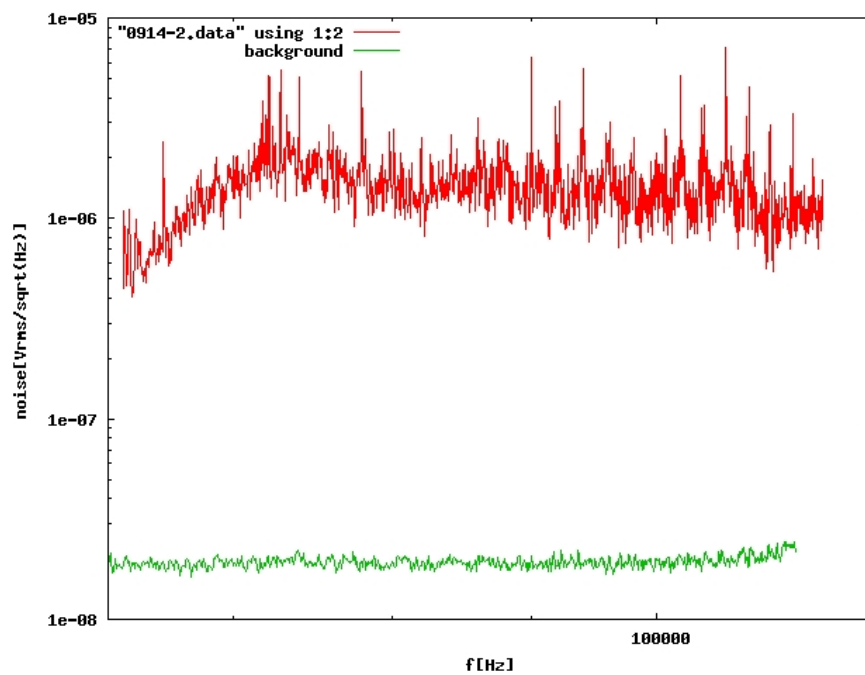


図 9: 63.8-115kHz のノイズ

ここでの「background」とはスペアナの入力を open な状態で測定を行ったものである。

4 実験結果 2

二種類のコンデンサーについて実験を行った。 $33000pF$ と $3300pF$ のコンデンサーである。なおコイルには $1.0kHz$, $100.0mV_{pp}$ の入力信号を入れた。

入力側のコイルにコンデンサーを並列に入れた図と、出力側のコイルにコンデンサーを並列に入れた図を載せる。

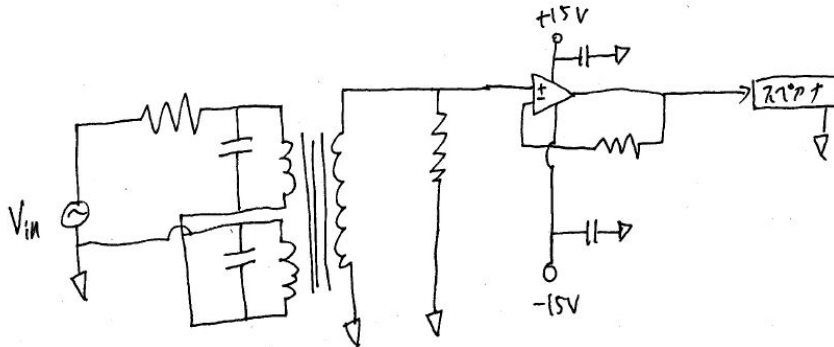


図 10: 入力側のコイルにコンデンサーを並列に入れた回路

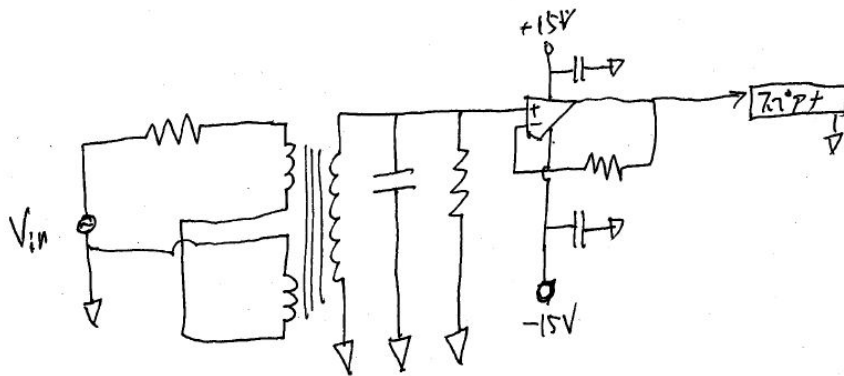


図 11: 出力側のコイルにコンデンサーを並列に入れた回路

測定結果を以下に示す。

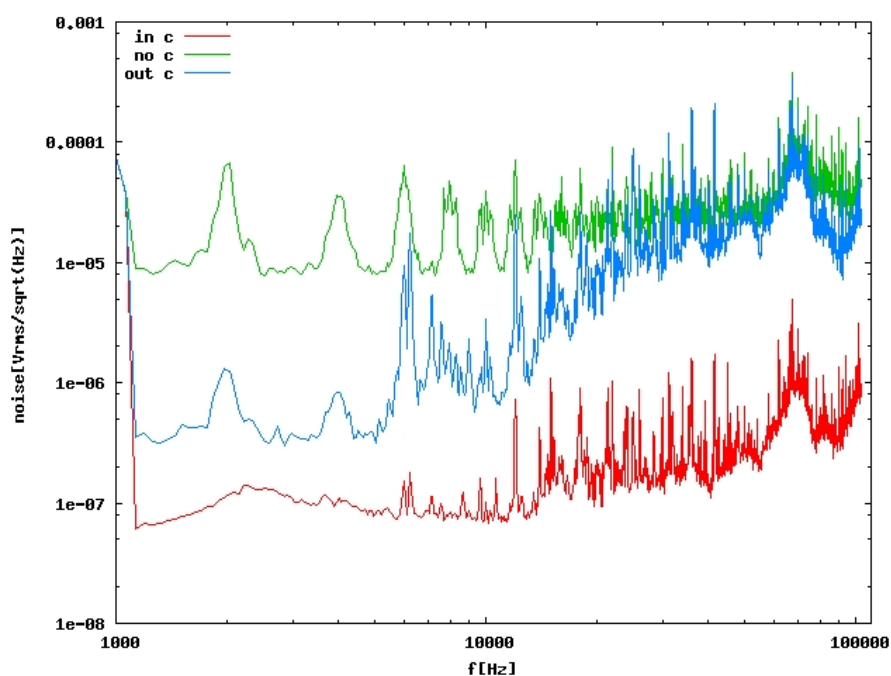


図 12: 3300pF のコンデンサーの場合。「in c」が入力側、「out c」が出力側にコンデンサーを入れた場合で、「no c」がコンデンサーを入れない場合のノイズである。

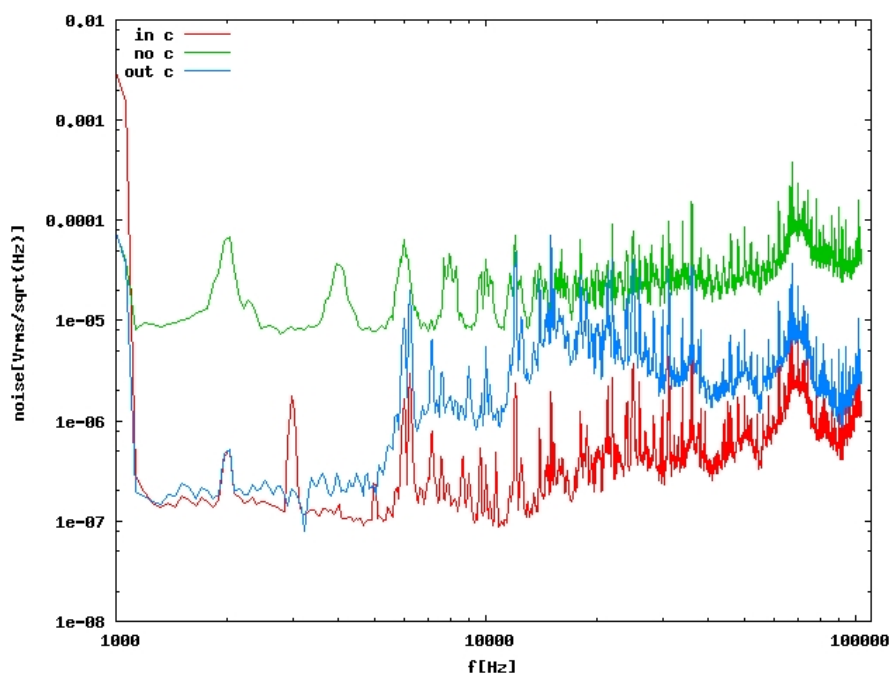


図 13: 33000pF のコンデンサーの場合。「in c」が入力側、「out c」が出力側にコンデンサーを入れた場合で、「no c」がコンデンサーを入れない場合のノイズである。

5 実験結果 3

次はコイルへの入力信号はなし、open の状態にして、680[pF] のコンデンサーをそれぞれいれてみた。それに入力信号に 100kHz, 100mVpp の入力を入れた場合を計った。それぞれ二回測定した。また全ての測定で resolution を 1600, average を 100 にした。

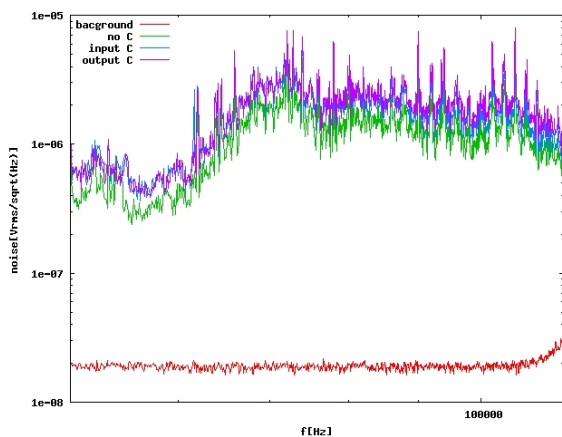
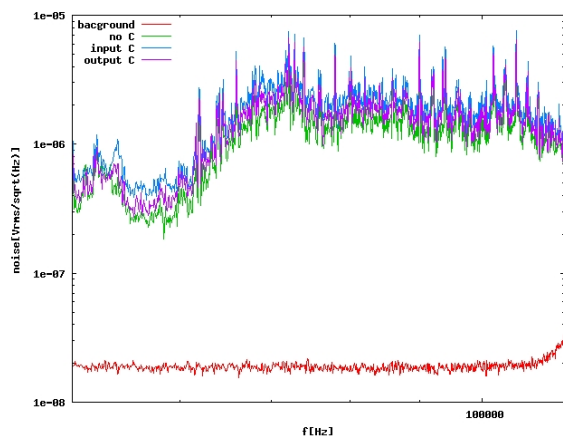


図 14: 入力を open な状態にした時の測定 a. 680pF のコンデンサーの場合。「input c」が入力側、「output c」が出力側にコンデンサーを入れた場合で、「no c」がコンデンサーを入れない場合のノイズである。

ある。

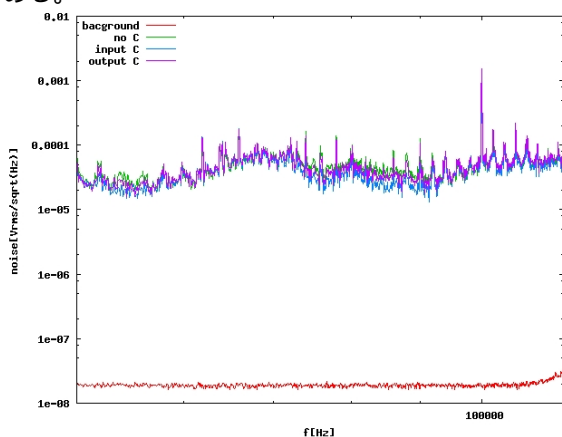
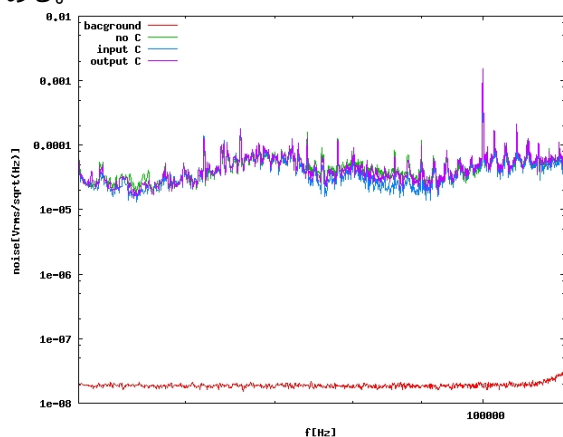


図 16: 入力に 100kHz, 100mVpp をいれた時の測定 a. 680pF のコンデンサーの場合。「input c」が入力側、「output c」が出力側にコンデンサーを入れた場合で、「no c」がコンデンサーを入れない場合のノイズである。

のノイズである。

ノイズ間の差はあるとすれば $\sqrt{2}$ 倍という大きさなので縦軸を linear でかいてみた。

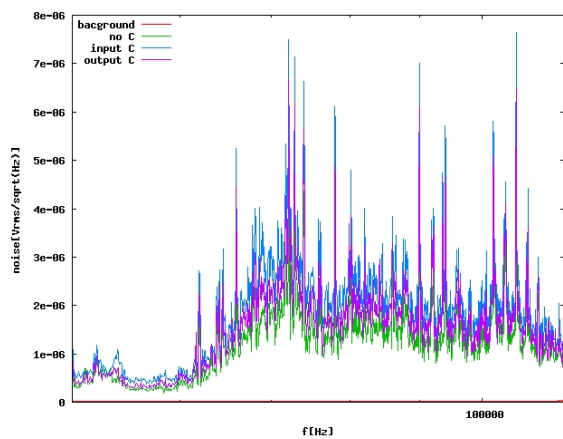


図 18: 入力を open な状態にした時の測定 a。

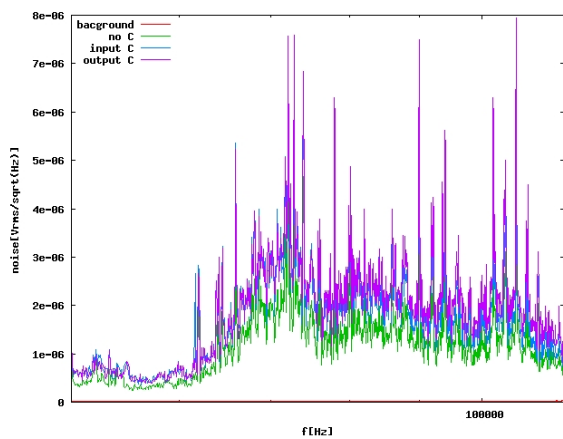


図 19: 入力を open な状態にした時の測定 b。

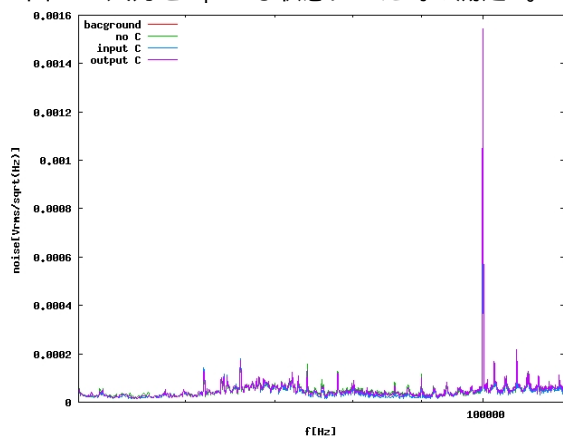


図 20: 入力に 100kHz, 100mV_{pp} を入れた時の測定 a。

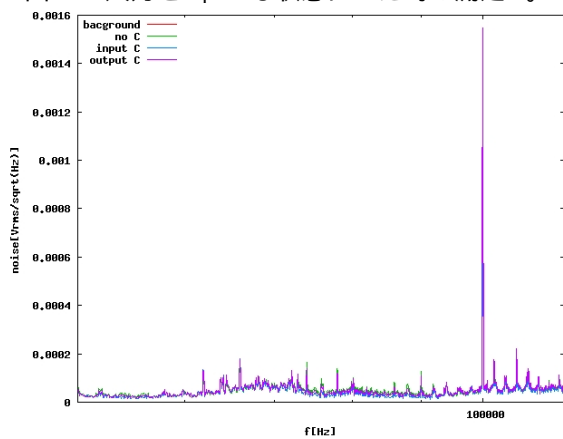


図 21: 入力に 100kHz, 100mV_{pp} を入れた時の測定 b。

結果を見ると、入力側と出力側に 1.4 倍の差は見られない。このことから、コンデンサーはノイズの観点から見ると、どちらにつけても構わない。(本当でしょうか?)

コンデンサーをどちらに付けるかは、あとはシグナル的にはどちらが得しているか、コンデンサーを付ける数などを考慮して決めるべき。