# 空気抵抗のある落下運動

東京大学理学系研究科天文学専攻 M1 ちんたん

2010/11/07

## 1　空気抵抗のない場合

空気抵抗のない場合の落下運動を解く。次のような微分方程式を考える。

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \tag{1}$$

これを解くと、次の様になる。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= -g && (2)\\
\frac{dz}{dt} &= -\int g dt && (3)\\
&= -gt + v_0 && (4)\\
z &= \int(-gt + v_0)dt && (5)\\
&= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 && (6)
\end{aligned}$$

これが答えになる。

## 2　速度の一乗に比例するような抵抗力が働く場合

空気抵抗を考える場合、落下速度が速いか遅いかで抵抗力が変化する。速度が遅い場合には空気の抵抗力は速度の一乗に比例した次のような力となる。

$$F_r = -\eta av \tag{7}$$

ここで $\eta$ は粘性係数で、摂氏 25 度の空気の場合には大体、

$$\eta \simeq 0.0182 \times 10^{-3}[Pa \cdot s] \tag{8}$$

である。（理科年表より）$a$ は落下物体の大きさである。球形の物体であれば、それは直径に値する。

では運動方程式をたてる。

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg - \eta av_z \tag{9}$$

これを解く。なおここで初期条件として、$t = 0$ のとき、$z = 0, v_z = 0$ とする。つまり、初速を与えずに自由落下させる。

$$\begin{aligned}
\frac{dv_z}{dt} &= -g - \frac{\eta a}{m}v_z && (10)\\
\int_0^{v_z} \frac{dv_z}{-g - \frac{\eta a}{m}v_z} = \int_0^t dt & && (11)\\
-\frac{m}{\eta a}\int_0^{v_z} \frac{dv_z}{v_z + \frac{mg}{\eta a}} &= t && (12)\\
& && (13)
\end{aligned}$$

積分すると、

$$\ln\left|v_z+\frac{mg}{\eta a}\right|_0^{v_z}=-\frac{\eta a}{m}t \tag{14}$$

となる。ここで ln の中に絶対値があることに注意する。この時点では ln の中身が正なのか負なのかは分からない。そこで、場合分けを行い、その計算結果から、どっちが正しいのかを物理的に判断する。

### 2.1 $v_z+\frac{mg}{\eta a}>0$ の場合

この場合、次のように計算される。

$$\begin{aligned}\ln\left(v_z+\frac{mg}{\eta a}\right)-\ln\left(\frac{mg}{\eta a}\right) &= -\frac{\eta a}{m}t &(15)\\ v_z+\frac{mg}{\eta a} &= \frac{mg}{\eta a}\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t} &(16)\\ v_z &= -\frac{mg}{\eta a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) &(17)\end{aligned}$$

### 2.2 $v_z+\frac{mg}{\eta a}<0$ の場合

この場合、ln 中にマイナス符号を付ければよい。

$$\ln\left(-v_z-\frac{mg}{\eta a}\right)-\ln\left(\frac{mg}{\eta a}\right)=-\frac{\eta a}{m}t \tag{18}$$

(19)

最初の項だけマイナスをつけた。第二項はマイナスを付けるべきだが、付けた後に絶対値を演算するので、結局上式のようになる。計算を進める。

$$\begin{aligned}-v_z-\frac{mg}{\eta a} &= \frac{mg}{\eta a}\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t} &(20)\\ v_z &= -\frac{mg}{\eta a}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) &(21)\end{aligned}$$

### 2.3 結論

式 (17)、(21) を睨んでみる。物理的には、速度 $v_z$ は $t=0$ のときに $v_z=0$ で、次第にマイナスに大きくなると考えられる。この物理的直観に一致する解は式 (17) の方である。

$$v_z=-\frac{mg}{\eta a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) \tag{22}$$

この解を睨むと、$v_z$ は次の値に漸近していくことがわかる。

$$v_{max}=-\frac{mg}{\eta a} \tag{23}$$

これが終端速度である。

次にこの $v_z$ を積分して、$z$ を求める。解くべき微分方程式は

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{mg}{\eta a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) \tag{24}$$

である。積分を行う。

$$\begin{aligned}\int_0^z dz &= -\frac{mg}{\eta a}\int_0^t\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right)dt &(25)\\ z &= -\frac{mg}{\eta a}\left(t+\frac{m}{\eta a}\mathrm{e}^{-\frac{m}{\eta a}t}\right)_0^t &(26)\\ &= -\frac{mg}{\eta a}\left(t+\frac{m}{\eta a}\mathrm{e}^{-\frac{m}{\eta a}t}-\left(0+\frac{m}{\eta a}\right)\right) &(27)\\ &= -\frac{m}{\eta a}gt+\left(\frac{m}{\eta a}\right)^2 g\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) &(28)\end{aligned}$$

これが粘性抵抗が働いた場合の物体の運動である。

## 3　速度の二乗に比例するような抵抗力が働いた場合

抵抗力として次のような力を考える。

$$F_r = \frac{C_d}{2}\rho S v^2 \tag{29}$$

ここで、$C_d$ は抵抗係数と呼ばれるもので、物体の形状等々に依存する量 (球体では大体 0.47) であり、$\rho$ は流体 (つまりは空気) の質量密度で、$S$ は落下物体の投影面積である。これを使って運動方程式を立てると次のようになる。

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg + \frac{C_d}{2}\rho S v_z^2 \tag{30}$$

これを解く。

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{C_d\rho S}{2m}v_z^2 \tag{31}$$

$$\int_0^{v_z}\frac{dv_z}{-g+\frac{C_d\rho S}{2m}v_z^2} = \int_0^t dt \tag{32}$$

$$\frac{2m}{C_d\rho S}\int_0^{v_z}\frac{dv_z}{v^2-\frac{2mg}{C_d\rho S}} = t \tag{33}$$

ここで次のように $A$ を定義する。

$$A \equiv \sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}} \tag{34}$$

次に積分を行いやすくするために、部分分数分解を行う。

$$\frac{1}{v^2-A^2} = \frac{-1}{2A}\left(\frac{1}{v+A}-\frac{1}{v-A}\right) \tag{35}$$

これを代入すると、次のように積分が行える。

$$-\frac{2m}{2AC_d\rho S}\int_0^{v_z}\left(\frac{1}{v_z+A}-\frac{1}{v_z-A}\right)dv_z \quad = \quad t \tag{36}$$

$$-\frac{2m}{2AC_d\rho S}\left(\ln|v_z+A|-\ln|v_z-A|\right)_0^{v_z} \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

いろいろ注意して、積分範囲を代入すると、次のようになる。

$$-\frac{m}{AC_d\rho S}\ln\left|\frac{v_z+A}{v_z-A}\right| = t \tag{39}$$

ここでも場合分けが必要となる。

### 3.1　$\frac{v_z+A}{v_z-A} > 0$ の場合

この場合には次のように計算ができる。

$$\frac{v_z+A}{v_z-A} \quad = \quad \mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t} \tag{40}$$

$$v_z + A \quad = \quad (v_z - A)\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t} \tag{41}$$

$$v_z \quad = \quad -A\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t}} \tag{42}$$

### 3.2　$\frac{v_z+A}{v_z-A} < 0$ の場合

この場合には次のように計算できる。

$$\frac{v_z+A}{A-v_z} \quad = \quad \mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t} \tag{43}$$

$$v_z + A \quad = \quad (A - v_z)\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t} \tag{44}$$

$$v_z \quad = \quad -A\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t}} \tag{45}$$

### 3.3 結論

物理的に考えて、初速無しの自由落下を満たす解は式 (45) の方である。

$$v_z = -A\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{AC_d\rho S}{m}t}} \tag{46}$$

この式において、次の tanh を使用する。

$$\tanh(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \tag{47}$$

すると、

$$\begin{aligned} v_z &= -A\tanh\left(\frac{AC_d\rho S}{2m}t\right) & (48)\\ &= -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}\tanh\left(\frac{\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}C_d\rho S}{2m}t\right) & (49)\\ &= -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right) & (50)\end{aligned}$$

となる。この式は $v_z$ が次の値に漸近していくことを示している。

$$v_{max} = -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}} \tag{51}$$

これが終端速度である。

次にこれを積分して、$z$ について求める。解くべき微分方程式は

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right) \tag{52}$$

である。ここで積分公式

$$\int \tanh(x)dx = \ln|\cosh(x)| + C \tag{53}$$

を使用する。すると、$z$ は

$$\begin{aligned} z &= -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}\int_0^t \tanh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right)dt & (54)\\ &= -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}\sqrt{\frac{2m}{C_d\rho Sg}}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right)\right] & (55)\\ &= -\frac{2m}{C_d\rho S}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right)\right] & (56)\end{aligned}$$

となる。

# 4 まとめ

以上をまとめる。原点から初速度 0 での自由落下を考える。落下方向は $-z$ 方向とする。

空気抵抗のない場合には、運動方程式は、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg \tag{57}$$

となり、解は、

$$\begin{aligned} v_z &= -gt & (58)\\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 & (59)\end{aligned}$$

となる。
　速度の一乗に比例する抵抗力が働く場合には、運動方程式は、

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - \eta a\frac{dz}{dt} \tag{60}$$

となり、解は、

$$v_z = -\frac{mg}{\eta a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) \tag{61}$$

$$z = -\frac{m}{\eta a}gt + \left(\frac{m}{\eta a}\right)^2 g\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\eta a}{m}t}\right) \tag{62}$$

となる。ここで $\eta$ はは粘性係数で、摂氏 25 度の空気の場合には大体、

$$\eta \simeq 0.0182 \times 10^{-3}[Pa \cdot s] \tag{63}$$

である。（理科年表より）$a$ は落下物体の大きさである。球形の物体であれば、それは直径に値する。
　速度の二乗に比例する抵抗力が働く場合には、運動方程式は、

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg + \frac{C_d}{2}\rho S v_z^2 \tag{64}$$

となり、解は、

$$v_z = -\sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho S}}\tanh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right) \tag{65}$$

$$z = -\frac{2m}{C_d\rho S}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{C_d\rho Sg}{2m}}t\right)\right] \tag{66}$$

となる。ここで、$\rho$ は流体 (つまりは空気) の質量密度で、$S$ は落下物体の投影面積である。空気の質量密度は 25 度で大体、

$$\rho = 1.184[kg/m^3] \tag{67}$$

であり、抵抗係数は大体、

$$C_d \simeq 0.47 \tag{68}$$

である。
　実際の実験で落下する物体の値を代入して、グラフに描いてみた。定数は以下の通りである。

$$g = 9.80665[m/s^2] \tag{69}$$

$$m = 2[kg] \tag{70}$$

$$\eta = 0.0182 \times 10^{-3}[Pa \cdot s] \tag{71}$$

$$a = 0.4[m] \tag{72}$$

$$C_d = 0.47 \tag{73}$$

$$\rho = 1.184[kg/m^3] \tag{74}$$

$$S = \pi a^2 \tag{75}$$

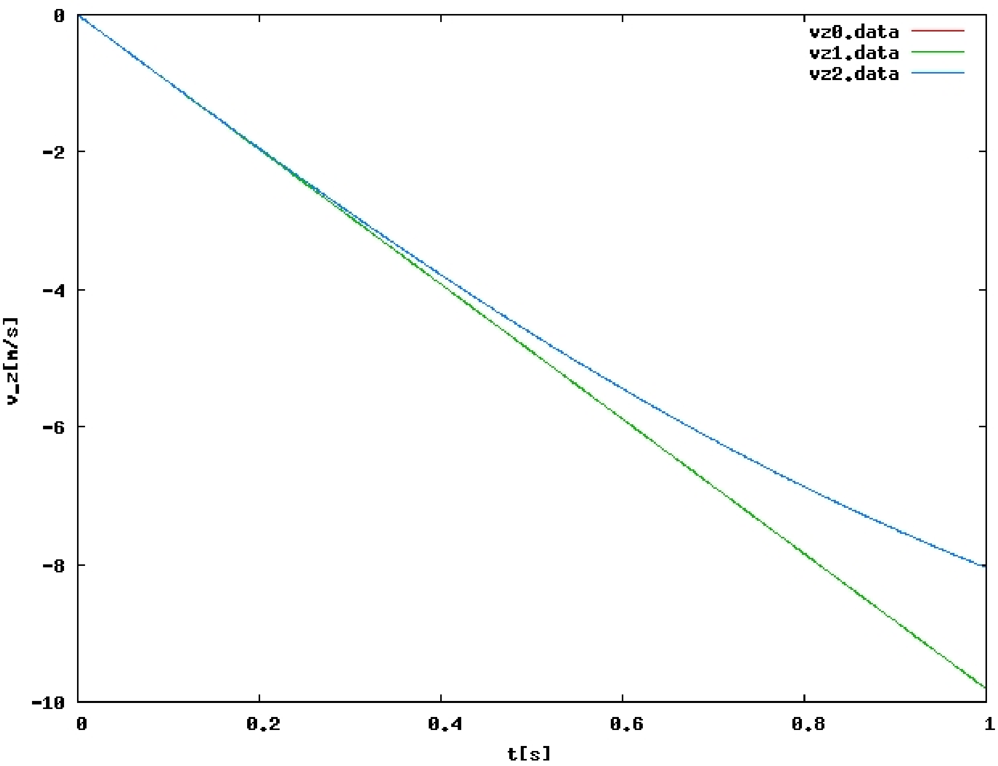


図 1: 速度の時間変化。vz0 が空気抵抗なし、vz1 が速度の一乗に比例する抵抗、vz2 が二乗に比例する抵抗。

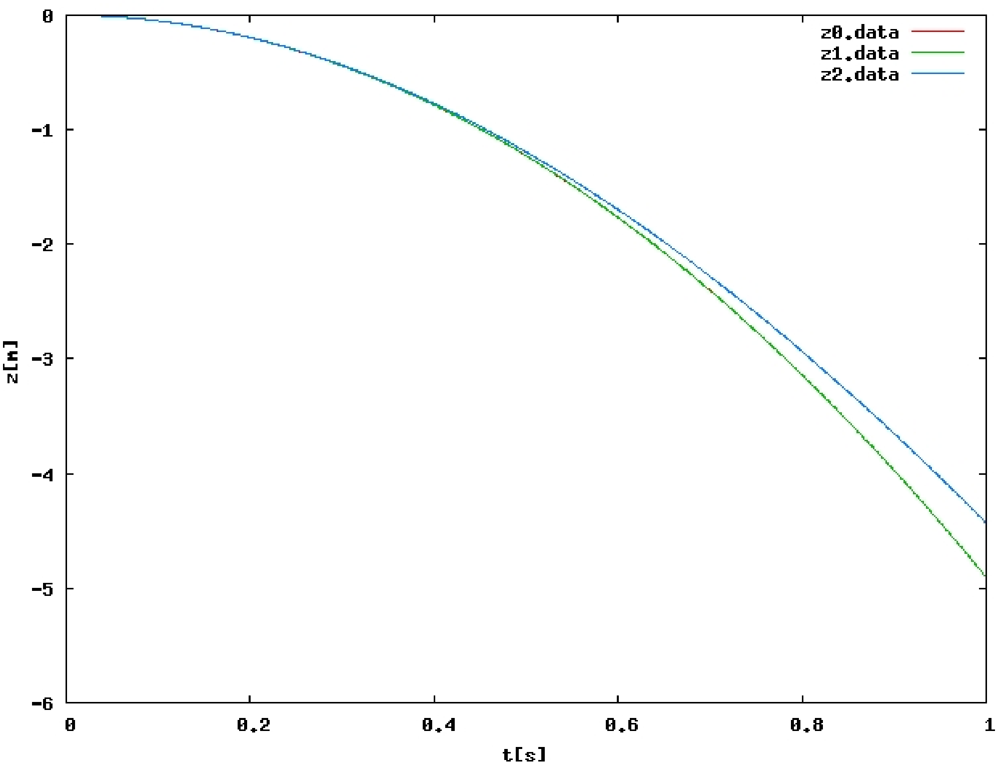


図 2: 落下物体の位置の時間変化。z0 が空気抵抗なし、z1 が速度の一乗に比例する抵抗、z2 が二乗に比例する抵抗。

上のグラフでは空気抵抗のない場合と一乗に比例する空気抵抗がある場合とでは、線が重なっているように見える。

空気抵抗と二乗に比例する場合の抗力がはたらいた場合の運動の差を見るために以下にその比を示した。

$$dv = \left|\frac{vz0 - vz2}{vz2}\right| \tag{76}$$

$$dz = \left|\frac{z0 - z2}{z2}\right| \tag{77}$$

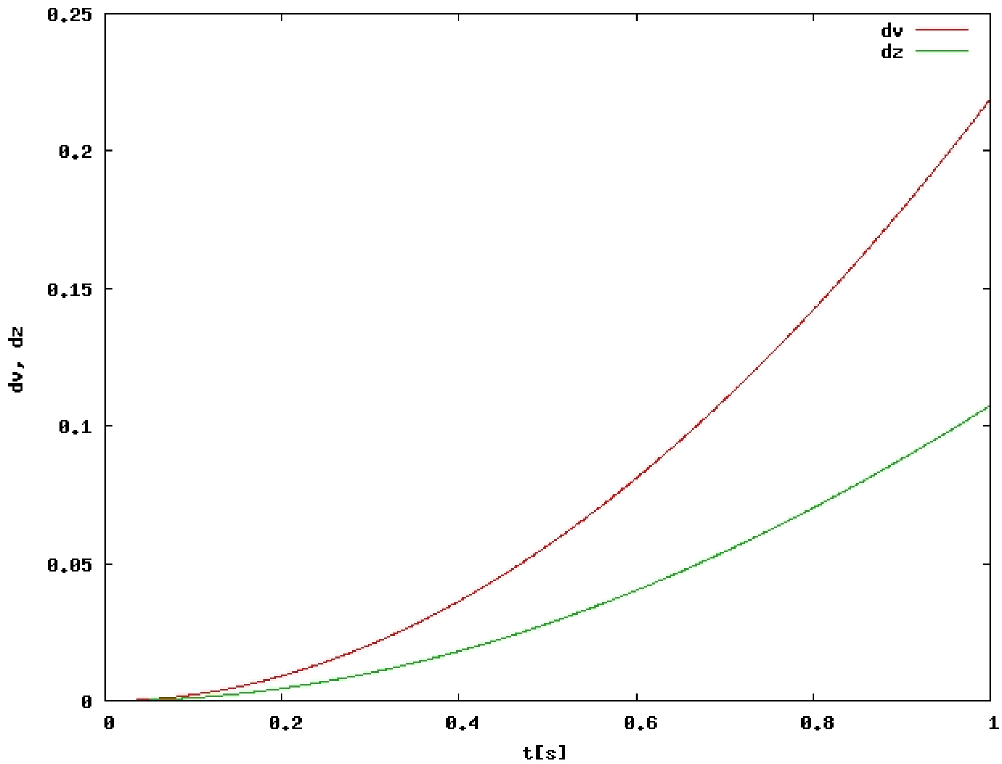


図 3: 空気抵抗無しの場合、速度の二乗に比例した抗力がはたらいた場合の速度と位置の差の比的な。

グラフから、5% 以内での $v$ の一致は大体 0.5 秒である。つまり、1m くらいの高さからの落下である。