

Ray Trace

東京大学理学系研究科天文学専攻 M1 ちんたん

2011/3/3
chen2011030301*

1 目的

重力波は実はレーザー干渉計というものを組み、とらえる。そこで重力波観測業界ではレーザーを使用する。このレーザーの光路設計はなくてはならない仕事である。本レポートは光路設計に欠かせない知識を記しておく。また設計の例として bLCGT の Ray Trace をしてみる。

Ray Trace に必要な知識は [Gaussian Beam][Gouy Phase][複素曲率 q の伝搬][ABCD Matrix (Propagation Matrix)] である。これらを説明した後に、bLCGT の場合についての計算の実際の結果を示す。

2 Gaussian Beam

レーザーの理想は Gaussian Beam である。Gaussian Beam とは電場の強度分布が光軸に対して Gauss 分布的に広がっている Beam である。つまり光軸上での電場がもっとも強く、光軸からずれていくと次第に減っていくということである。

Beam はその周波数によって強度が変化するが、ここではその変化は考えない。このときに、Gaussian Beam を空間とかレンズとかいろいろ通していくときに、各点における Gaussian Beam の状態をどう表すかということ、複素曲率 q で表す。 q は以下のように表される。

$$\frac{1}{q} = -\frac{i\lambda}{\pi\omega^2} + \frac{1}{R} \quad (1)$$

ここで λ はレーザー波長で、 ω はその地点でのビームの半径で、 R はその地点でのビームの曲率半径である。Ray Trace ではこの q の変化を追跡していき、各地点での値を計算する。

3 Gouy Phase

次に Gouy Phase を説明する。Gouy Phase とは Gaussian Beam と平面波との間の位相の差である。次の図のような節をもった Gaussian Beam を考える。

*ChenDan が書いたレポート中の固有番号

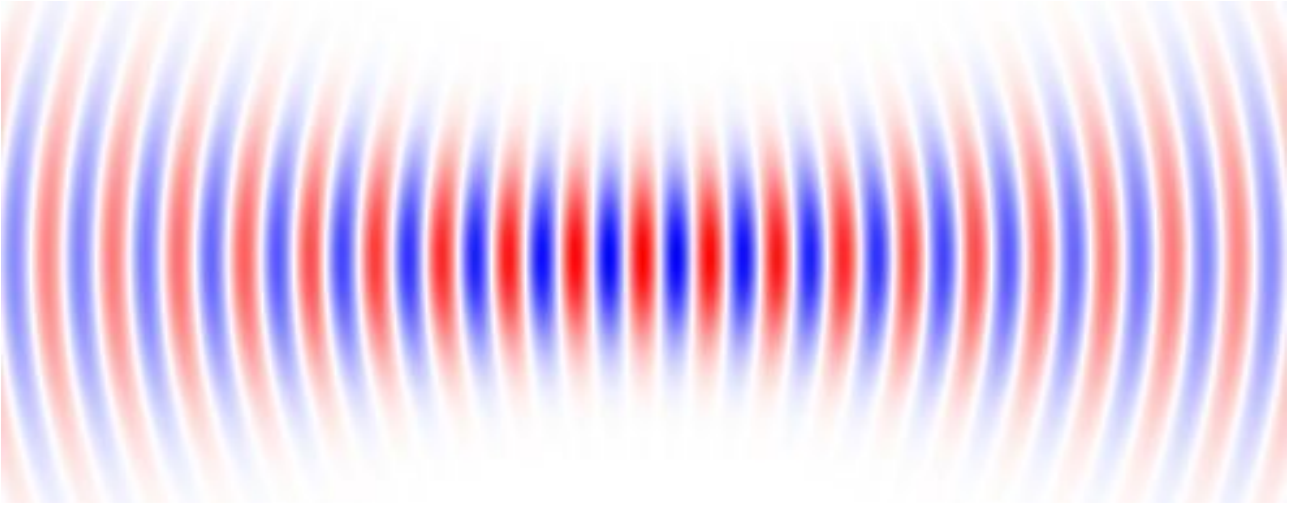


図 1: Gaussian beam。節から離れると ω は次第に大きくなっていき、 R は ∞ から小さくなり、また ∞ に向かって大きくなる。

このとき、節から Gaussian Beam と同時に平面波も放射されたとすると、各地点における平面波と Gaussian Beam の間の位相の差は次のように表され、これが Gouy Phase Shift となる。

$$\eta = \arctan \frac{z}{z_R} \quad (2)$$

ここで z とは節からの距離で、 z_R は Rayleigh length と呼ばれる量で、次のように Beam waist の半径 ω_0 で表される。

$$z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \quad (3)$$

4 ABCD matrix

光線の伝搬を計算するのに便利な方法に ABCD matrix による計算がある。この方法はもともとは Gaussian Beam ではなくただの光線 (平面波) がどのように伝搬していくのかを計算できるようにしたものである。自由空間、レンズ、ミラーなどの各光学素子を特徴づける量からそれぞれ 2 行列を作り、これを素子を通る前の光線の (y, θ) に演算する。ここで y とは光線と光軸との距離で、 θ とは、光軸との角度である。演算後に得られる値が、素子を通った後の (y', θ') となる。一般的には次のような式になる。

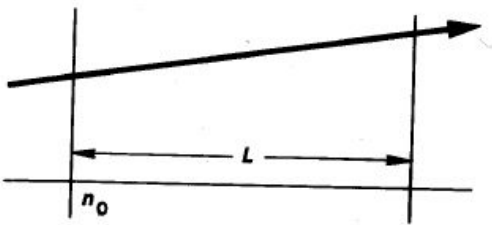
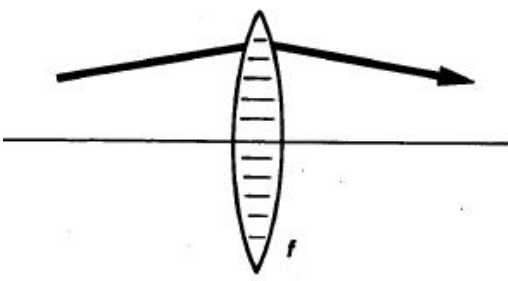
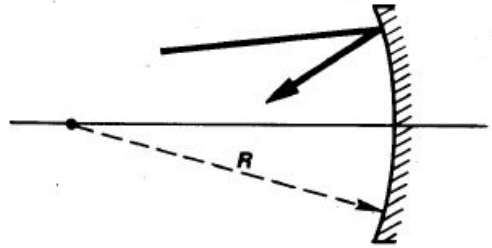
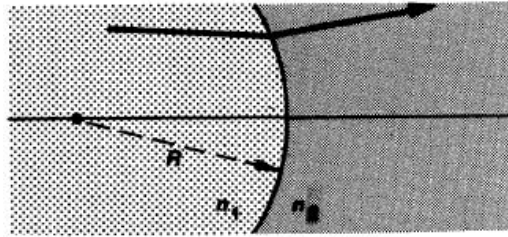
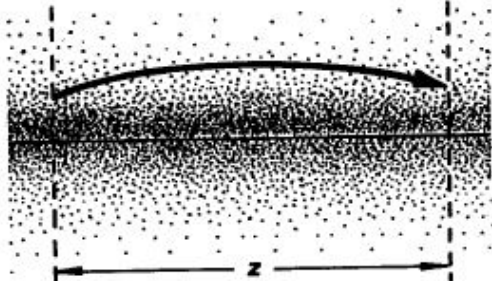
$$\begin{pmatrix} y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

例えば自由空間 l を通ったときには次のように計算される。

$$\begin{pmatrix} y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} y + l\theta \\ \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

各光学素子の ABCD matrix を以下に示す。なお以下では光線が伝搬していく方向に凸の場合の球面等の曲率を正とする。

自由空間		$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	屈折率 n_0 , 長さ L
レンズ		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	焦点距離 f , $f > 0$:凸レンズ
鏡		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$	曲率 R , $R > 0$:凹面鏡
境界面		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$	曲率 R , $R > 0$:凹面境界
導管		$\begin{pmatrix} \cos \gamma z & \frac{\sin \gamma z}{n_0 \gamma} \\ -n_0 \gamma \sin \gamma z & \cos \gamma z \end{pmatrix}$	$n(x) = n_0 - \frac{1}{2} n_2 x^2, \gamma^2 = \frac{n_2}{n_0}$

5 複素曲率 q の伝搬

ABCD matrix を使えば、 q の伝搬も計算することができる。 q に特殊な方法で演算させ、新しい q を求める。それは以下のような演算である。

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (7)$$

各地点での q はビーム半径 ω と、曲率半径 R で構成されているため、ある地点での ω, R を q に代入し、そこから ABCD matrix を上の式を使って新しい q' を求めて、さらに虚部と実部に分けて考えれば、新しい地点での ω, R が計算できる。

6 Gouy Phase の積算

次に Gouy Phase の計算をどのようにしたらいいかを説明する。Gouy Phase Shift はなんらかの空間を伝搬するとどんどん積算されていく。Ray Trace ではこれをどんどん足し合わせなければならない。このとき、ビームは必ずしもウエストから始まるわけではない。つまり Gouy Phase を求めるのに必要な ω_0 は必ずしも始めから分かっているわけではない。そこで計算により一回この z_R を求める必要がある。

自由空間について考える。

自由空間ではビーム半径 ω とビームの曲率半径 R は次のように変化していく。(座標 z は waist を原点にとっている)

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (8)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2 \right] \quad (9)$$

この式を使用するには常に beam waist での情報 ω_0 が必要である。実際に Ray Trace を行うときには、beam waist ではなく、ビームの途中の二点での $\omega_1, R_1, \omega_2, R_2$ が分かっている、その間で起こる Gouy Phase Shift が知りたいのである。ただし waist から二地点までの絶対的な距離 z_1, z_2 は分からず、相対的な距離 $z = z_2 - z_1$ のみが分かっているとする。

まず 2 地点での $R(z)$ の発展の式を書いてみる。

$$R(z_1) = z_1 \left[1 + \left(\frac{z_R}{z_1}\right)^2 \right] \quad (10)$$

$$R(z_2) = z_2 \left[1 + \left(\frac{z_R}{z_2}\right)^2 \right] \quad (11)$$

この二式で、いま分からないのは z_1, z_2, z_R である。ただ、 $z = z_2 - z_1$ は分かっているの、解くことはできる。そこでこの二式を連立させ、さらに変数を z_2 から z に書き換えて、 z_1 について求めると以下の様になる。

$$z_1 = \frac{zR_2 - z^2}{R_1 - R_2 + 2z} \quad (12)$$

これを使えば z_R も次のように求めることができる。

$$z_R = \sqrt{(z + z_1)R_2 - (z + z_1)^2} \quad (13)$$

以上から二地点での情報 $\omega_1, R_1, \omega_2, R_2$ から z_R を求めることができた。これを使って、ビーム waist から二地点までに Gouy Phase がどれだけ回ったかをそれぞれ求め、その差をとれば、二地点間の Gouy Phase Shift 量が以下の様に計算できる。

$$\eta = \arctan \frac{z_2}{z_R} - \arctan \frac{z_1}{z_R} \quad (14)$$

ここで、

$$z_2 = z_1 + z \quad (15)$$

である。

7 まとめ

以上のことを使えば、Ray Trace を行うことができる。

まずは各光学素子の ABCD matrix を使って各地点での ω, R を求め、空間伝搬であったときに Gouy Phase の積算を行えばよい。

8 プログラム

これを計算させる FORTRAN のプログラムを作成した。gouyphase.f である。以下にそのソースを記しておく。

```
c      2011/02/12 Chen Dan
c      q0 の成分である w0 と R0 と、ABCD matrix をひとつ取得し、q の成分である w と R を求める。
c      空間かどうかを聞き、解答が 8888 なら空間として計算を行い、Gouy Phase の積算を行う。
c      続けるかどうかを聞き、解答が 7777 なら、その状態で次の ABCD matrix を掛けていく。
c      使用する波長は 1064nm
program ABCDq
  implicit none
  real*8 pi, c, lambda
  complex*8 i, q0, q
  real*8 w0, R0, w, R
  real*8 A(4)
  integer j, k
  real*8 z0, z, zR, phi
  real*8 sr0, sr

  pi = 4.0D0*datan(1.0D0)
  c = 2.99792458D8
  i = (0.0D0, 1.0D0)

  lambda = 1.064D-6

  phi = 0.0D0
c      phi = 0.09543562995D0

  print *, 'free space'
  print *, '1 d'
  print *, '0 1'

  print *, '*****'

  print *, 'lens'
  print *, ' 1 0'
  print *, '-1/f 1'

  print *, '*****'

  print *, 'mirror'
  print *, ' 1 0'
  print *, '-2/R 1'
```

```

print *, '*****'

print *, 'w0 [mm]'
read (*,*) w0
w0 = w0 * 1.0D-3

print *, 'R0 [m]'
read (*,*) R0

q0 = 1.0D0 / (-i*lambda/(pi*w0*w0) + 1.0D0/R0)

open(1, file = "out.txt")
write (1, "('w, R=', 2f23.15 )") w0*1.0D3, R0

100  print *, 'free space? 8888 or 0'
      read (*,*) k

      print *, 'ABCD'
      do j=1, 4, 1
        read(*, *) A(j)
      end do

      write (1, "(' ')")
      write (1, "('A=', 4f23.15 )") A

      q = (A(1)*q0 + A(2))/(A(3)*q0 + A(4))
      w = dsqrt(-1.0D0*lambda/(dimag(1.0D0/q)*pi))
      R = 1.0D0/dbl(1.0D0/q)

      if (k==0) then
        print *, ' not free space'
      else if (k==8888) then
        z0 = (A(2)*R-A(2)**2.0D0)/(R0-R+2.0D0*A(2))
c      zR = dsqrt((A(2)+z0)*R - (A(2)+z0)**2.0D0)
        zR = dsqrt(A(2) * (R-A(2)) * (R0 + A(2)) * (R0 - R + A(2)))/
&        dsqrt((R0 - R + 2.0D0*A(2))**2.0D0)

        z = A(2) + z0
        phi = phi + (datan(z/zR) - datan(z0/zR))

        write(*, "('phi=', f20.15)") phi
        write(1, "('zR=', f20.15)") zR
        write(1, "('z0=', f20.15)") z0
c      write(*, "('z=', f20.10)") z
      else
        print *, 'error2'
        goto 500
      end if

```

```

        write (1, "('w, R, phi=', 3f23.15 )") w*1.0D3, R, phi

c      print *, '*****'
c      write(*, "('i=', 2f20.15)") i
c      write(*, "('A=', 4f20.15)") A
c      write(*, "('q0=', 2f20.15)") q0
c      write(*, "('q=', 2f20.15)") q
c      write(*, "('w=', 2f23.15)") w*1.0D3
c      write(*, "('R=', 2f23.15)") R

200    print *, 'continue? 7777 or 0'
        read (*, *) j
        if (j==0) then
            print *, 'end'
        else if (j==7777) then
            q0 = q
            R0 = R
            w0 = w
            goto 100
        else
            print *, 'error1'
            goto 200
        end if

        close(1)

        phi = phi*180.0D0/pi
        write(*, "('phi=', f20.15)") phi

        print *, 'out.txt'

500    print *, 'error'

        end program ABCDq

```

9 参考文献

Encyclopedia of Laser Physics and Technology
<http://tamago.mtk.nao.ac.jp/chen/report/gaussian.pdf>
<http://tamago.mtk.nao.ac.jp/chen/report/gouy.pdf>