目 次

Q 値の導入

東京大学理学系研究科天文学専攻 35-106130 チン タン

2010/08/11

1 目的と概要

重力波観測装置には振り子が使われている。この振り子には必ず dumping (摩擦によるエネルギー損失) が起こる。この dumping に非常に関係してくるのが Q 値というものである。

本レポートでは Q 値について、力学からのアプローチを行う。つまり抵抗のある振り子の運動方程式 (1 次元で考える) を立式し、それを解く。このときに運動方程式が複雑になるために、フーリエ変換を使って解くことを試みる。また逆フーリエ変換を行うときには、留数計算を必要とした。

2 運動方程式

解くべき振り子の運動方程式を考える。振り子はわずかにしか揺れないとして、復元力は変移 $x(t)$ に比例した力とする。また抵抗力は速度 $\dot{x}(t)$ に比例するとする。これは振り子の速度が十分小さいとして、慣性抵抗よりも粘性抵抗が支配的だと仮定した。以上の力に加えて、外界からのなんらかの力 $f(t)$ がその振り子の系に加わったとする。$f(t)$ は例えば、激力 $\delta(t)$ だったり、振動するような外力だったり、力がない場合には 0 であったりする。このときの運動方程式は以下の様になる。

$$m\left[\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x(t)\right]=f(t) \tag{1}$$

ここでは ω_0 や Q をなんのことわりもなくいれたが、これらは後々物理的な意味を持ってくる。

3 運動方程式の解法

式 1 は適当な関数 (例えば指数関数) を仮定してあげれば、解けなくはない。しかし、今回はもっと一般的にこの式を解くことを考える。

3.1 フーリエ変換

運動方程式 1 を見ると、少し複雑で、初等的には解けそうに無い。そこでフーリエ変換、ラプラス変換を使って解くことを考える。今回の場合には後に $f(t)$ を 0 として仮定することを考えれば、ラプラス変換で解く必要はなく、フーリエ変換で十分である。(発散する解は物理的に考えられないから)

運動方程式 1 をフーリエ変換することを考える。

フーリエ変換を次のように定義する。

$$\tilde{x}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t x(t)e^{-i\omega t} \tag{2}$$

これより、一階微分、二階微分は次のようにフーリエ変換される。(部分積分を使用)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}e^{-i\omega t} = i\omega\int_{-\infty}^{\infty}rmdtx(t)e^{-i\omega t} \tag{3}$$

$$= i\omega\tilde{x}(\omega) \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}e^{-i\omega t} = -\omega^2\tilde{x}(\omega) \tag{5}$$

また $f(t)$ のフーリエ変換を

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) e^{-i\omega t} \tag{6}$$

と定義する。

以上から運動方程式 1 は次のようにフーリエ変換される。

$$m \left[-\omega^2 \tilde{x}(\omega) + i \frac{\omega_0 \omega}{Q} \tilde{x}(\omega) + \omega_0^2 \tilde{x}(\omega) \right] = \tilde{f}(\omega) \tag{7}$$

これよりこの系の応答関数 $H(\omega)$ は次の様になる。

$$\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{m \left(-\omega^2 + i \frac{\omega_0 \omega}{Q} + \omega_0^2 \right)} \tag{8}$$

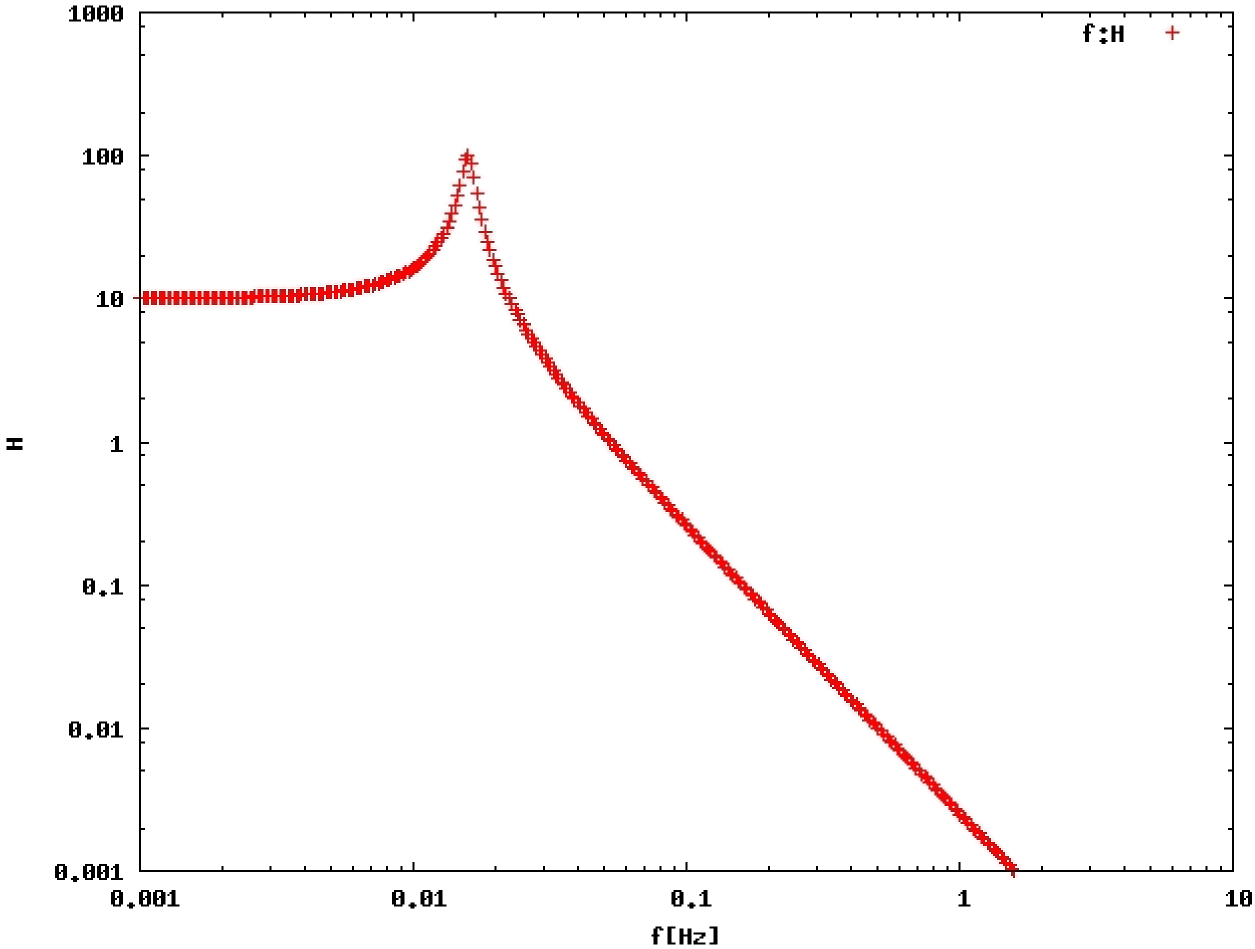
これをグラフにした。定数は

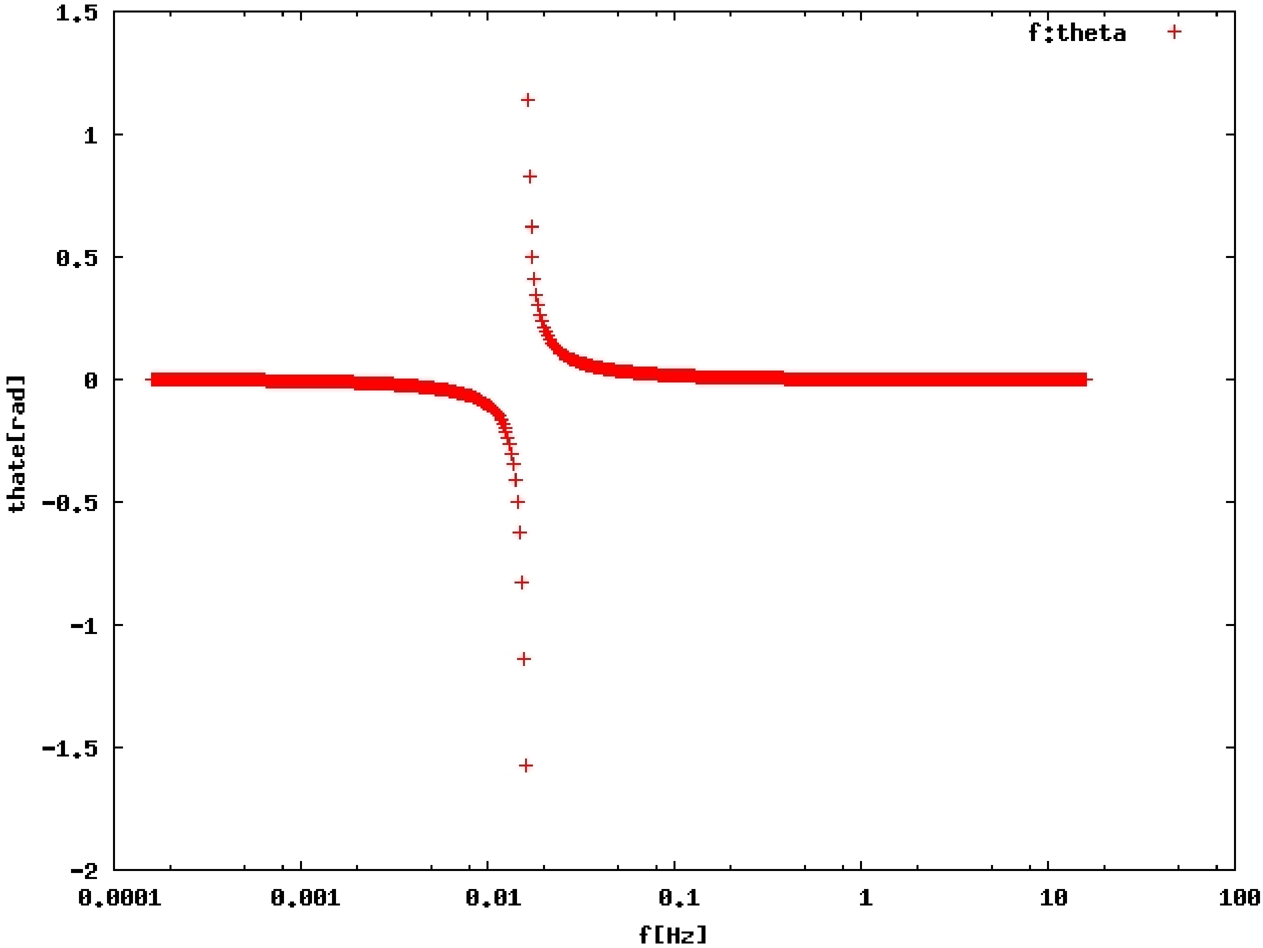
$$m = 10.0 \tag{9}$$

$$w_0 = 0.1 \tag{10}$$

$$Q = 10 \tag{11}$$

とした。




f:theta
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
thate[rad]
0.0001
0.001
0.01
0.1
1
10
100
f[Hz]

3.2 逆フーリエ変換

次に $f(t)$ に実際に考える力を与えて $x(t)$ を求める。激力を考える。

$$f(t) = \delta(t) \tag{12}$$

この場合の運動方程式は簡単に

$$m\left[\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t)\right] = \delta(t) \tag{13}$$

となる。この式のフーリエ変換は前節より、

$$m\left[-\omega^2\tilde{x}(\omega) + i\frac{\omega_0\omega}{Q}\tilde{x}(\omega) + \omega_0^2\tilde{x}(\omega)\right] = 1 \tag{14}$$

となる。(デルタ関数の積分を行った。) この式を $\tilde{x}(\omega)$ について解くと次のように簡単に求まる。

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{m\left(-\omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2\right)} \tag{15}$$

あとはこれを逆フーリエ変換すれば $x(t)$ が求まる。

逆フーリエ変換は次のようになる。

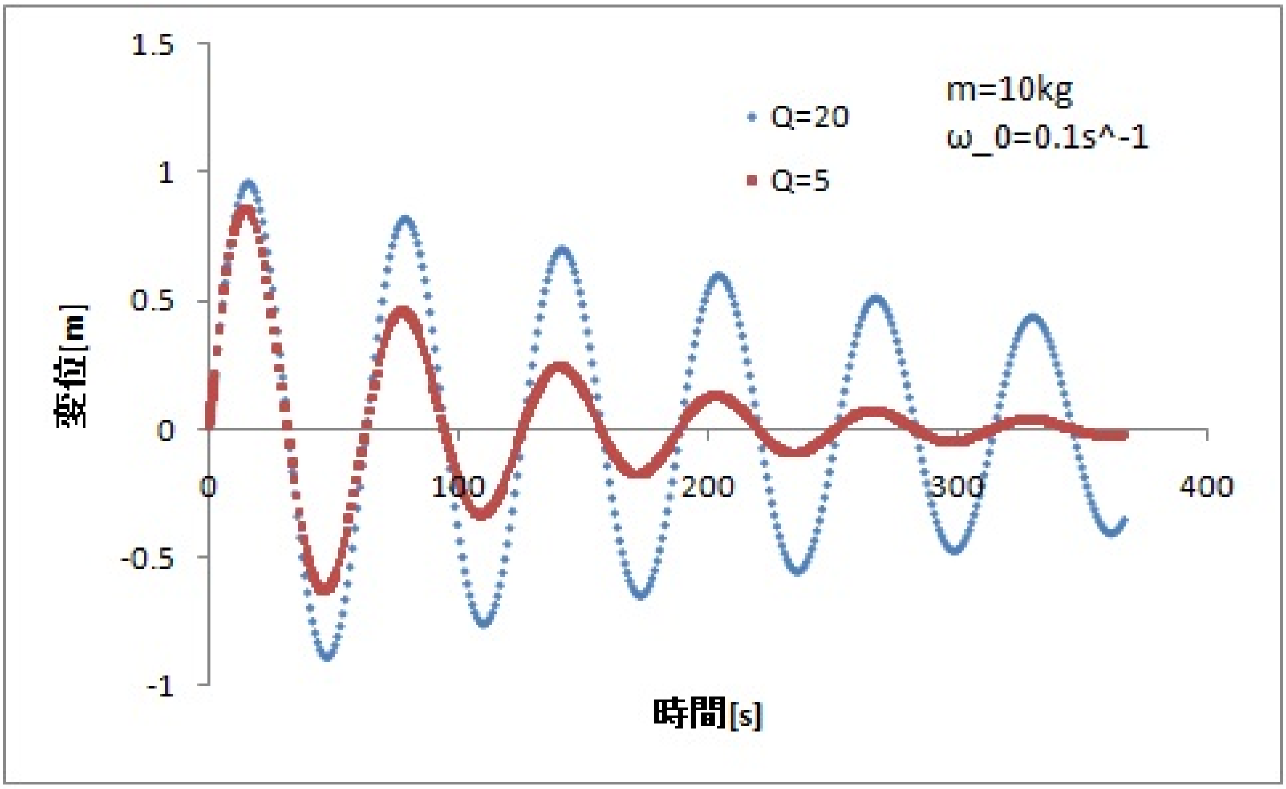
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\tilde{x}(\omega)e^{i\omega t} \tag{16}$$

この積分計算をすると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\tilde{x}(\omega)e^{i\omega t} && (17)\\
&= -\frac{1}{2\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0\omega}{Q}} && (18)\\
&= -\frac{1}{2\pi m}\left(-2\pi\frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right) && (19)\\
&= \frac{1}{m\omega_0}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin\omega_0 t && (20)
\end{aligned}$$

ここでの積分計算 (留数計算) は Appendix を参照。

この解の物理的な解釈を行う。sin の項はもちろん振動を意味している。その振動は運動方程式中の ω_0 を周波数としている。exp の項は減衰を意味していて、Q の値によってどうやら、その減衰の仕方が変わりそうである。実際に Q 値を変えて plot してみた。



A　留数計算

式 18 の積分はそう簡単にはいかない。留数計算をまじめにやってみる。積分のみを考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0 \omega}{Q}} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

この積分を解くためにまず以下のような複素積分を考える。(変数: $\omega \to z$)

$$\int \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{z^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0 z}{Q}} \tag{23}$$

留数計算をするために、まずは極を見付け、積分経路を設定する。極は簡単で次の二次式の解が極となる。

$$z^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0 \omega}{Q} = 0 \tag{24}$$

結局、極は

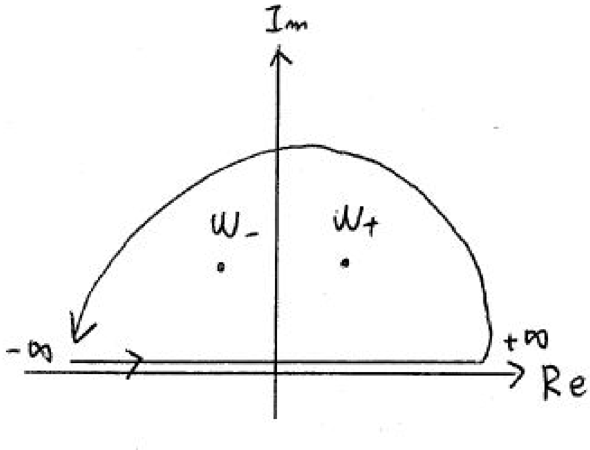
$$z = \frac{i\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{-\frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2}}{2} \equiv \omega_+, \omega_- \tag{25}$$

この $\omega_\pm$ を使用して式 23 を書き換えると、

$$\int \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{z^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega_0 z}{Q}} = \int_{\frown} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} \tag{26}$$

$$= \int_{\frown} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} + \int_{--} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} \tag{27}$$

ここで考えた積分範囲は以下の図のようなものである。



ここでみそなのは、一つに極を包括するように周回積分を行っている。もう一つに実軸上で $-\infty \to \infty$ の積分を行っている。一つ目の味噌はもちろんこの複素積分が値を持つように積分経路を決めたため。二つ目の味噌は求めたい積分 (式 21) を含んでいる。

円弧部分での積分を見てみる。変数変換を行う。

$$z = Re^{i\theta t} \quad (R \to \infty) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \int_{\frown} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{e^{izt} itRe^{i\theta t}}{(Re^{i\theta t-\omega_+})(Re^{i\theta t-\omega_-})} \to 0 \tag{29}$$

次にいよいよ留数計算を行う。式 26 の右辺の計算を行う。

$$\int_{\frown} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} = 2\pi i \sum a_{-1}(z_i) \tag{30}$$

ここで

$$a_{-1}(\omega_+) = \lim_{z\to\omega_+} (z-\omega_+) \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} \tag{31}$$

$$= \frac{e^{i\omega_+ t}}{\omega_+ - \omega_-} \tag{32}$$

$$a_{-1}(\omega_-) = \frac{e^{i\omega_- t}}{\omega_- - \omega_+} \tag{33}$$

であるから、

$$\int_{\frown} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} = 2\pi i \frac{e^{i\omega_+ t} - e^{i\omega_- t}}{\omega_+ - \omega_-} \tag{34}$$

ここに ω_+, ω_- の値を代入するが、そのときに $Q \gg 1$ の条件を使って近似を行う。

$$\int_{\frown} \mathrm{d}z \frac{e^{izt}}{(z-\omega_+)(z-\omega_-)} = -2\pi \frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin \omega_0 t}{\omega_0} \tag{35}$$

これでやっと式 18 の積分が完成した。

参考文献

[1] 坪野研「ブラウン運動の実験」