振り子の力学

東京大学理学系研究科天文学専攻 M2 ちんたん

2011/6/5
chen2011060501*

1　背景と目的

DPF マスモジュールの開発ではテストマスを自由質点と見なせるように、以下の写真の方に円柱型のマスを 2 つ使い、2 重振り子を作り、静電センサー静電アクチュエータで制御をかけている。そこでこの 2 重振り子の力学的性質を解析的に知る必要がある。具体的には、下段の振り子の並進、ヨー方向の回転の運動を求めたい。特に共振周波数が知りたい。なおこの振り子の 1 段目の横の壁にはダンピングを行うためのネオジウム磁石が置いてある。

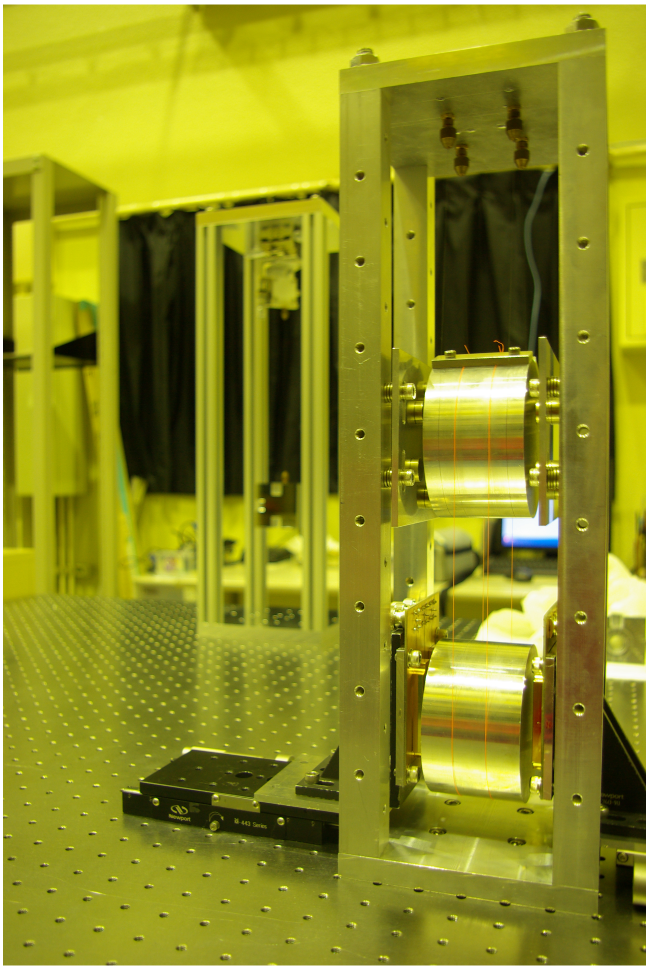

図 1: 実際の 2 重振り子。テストマスは 2 つとも円柱形。 1 段目にはマグネットダンピングが施されている。

*レポートの固有番号

2 理想化と方針

今回考えている振り子系は並進、ヨー回転しかしないと考える。最終的にはこの 2 つの自由度についてそれぞれについて防震比 (地面振動に対する 2 段目のテストマスの動き) を求める。

以下のような順番でそれぞれの防震比を計算する。

1. 1 本吊り単振り子
2. 1 本吊り 2 重振り子
3. 2 本吊り単振り子
4. 2 本吊り 2 重振り子
5. 4 本吊り単振り子
6. 4 本吊り 2 重振り子

3 1 本吊り単振り子

以下のような質点系を仮定する。

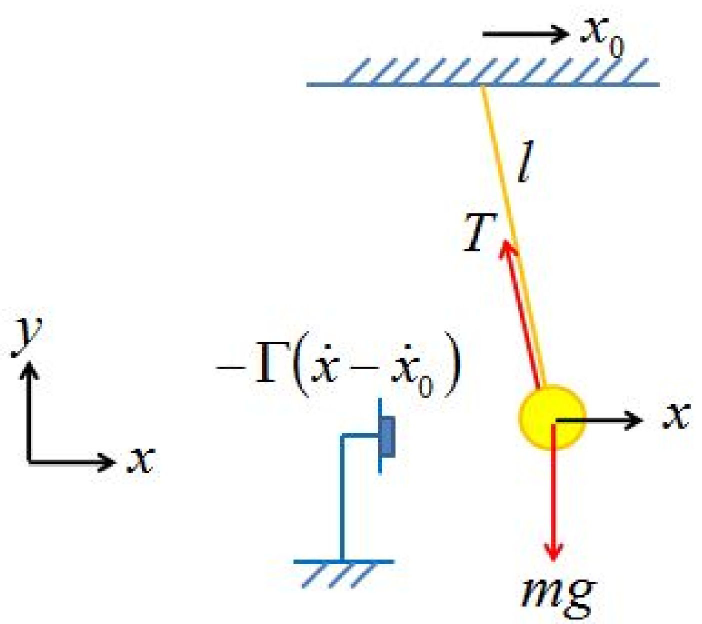

図 2: 1 本吊り単振り子。物体は質点として扱う。

並進の x 方向のみを考える。張力 T の y 方向成分 T_y 及び x 方向成分 T_x の大きさは、

$$T_y = T\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{l^2}} \simeq T = mg \tag{1}$$

$$T_x = T\frac{x-x_0}{l} = m\frac{g}{l}(x-x_0) \tag{2}$$

となる。よって質点の x 軸方向の運動方程式は次の様になる。この時、速度に比例するような抵抗力が働くと仮定した。その大きさは Γ に寄与する。

$$m\ddot{x} = -\Gamma(\dot{x}-\dot{x}_0) - m\frac{g}{l}(x-x_0) \tag{3}$$

ここで x, x_0 はともに時間の関数である。(x_0 は外乱) この微分方程式を解くにあたって、フーリェ変換を使用する。フーリェ変換についての詳細は Appendix に記す。方程式をフーリェ変換すると、

$$-m\omega^2 X = -i\Gamma\omega X + i\Gamma\omega X_0 - m\omega_1^2 X + m\omega_1^2 X_0 \tag{4}$$

となる。なおここで $\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$ とした。これを解き、防振比 $Z \equiv \frac{X}{X_0}$ を求めると、

$$\frac{X}{X_0} = \frac{-m\omega_1^2 - i\Gamma\omega}{m(\omega^2 - \omega_1^2) - i\Gamma\omega} \equiv Z \tag{5}$$

となる。この大きさ $\left|\frac{X}{X_0}\right|$:gain と位相 ϕ を求めると以下の様になる。

$$\left|\frac{X}{X_0}\right| = \sqrt{Z\bar{Z}} \tag{6}$$

$$\phi = \arctan\frac{Im(Z)}{Re(Z)} \tag{7}$$

$\bar{Z}$ は Z の複素共役を意味する。これをグラフにする。使用したパラメータは以下である。

$$m = 1.3[kg] \tag{8}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.2}} = 7.0[radHz] \tag{9}$$

$$\nu_1 \equiv \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.1[Hz] \tag{10}$$

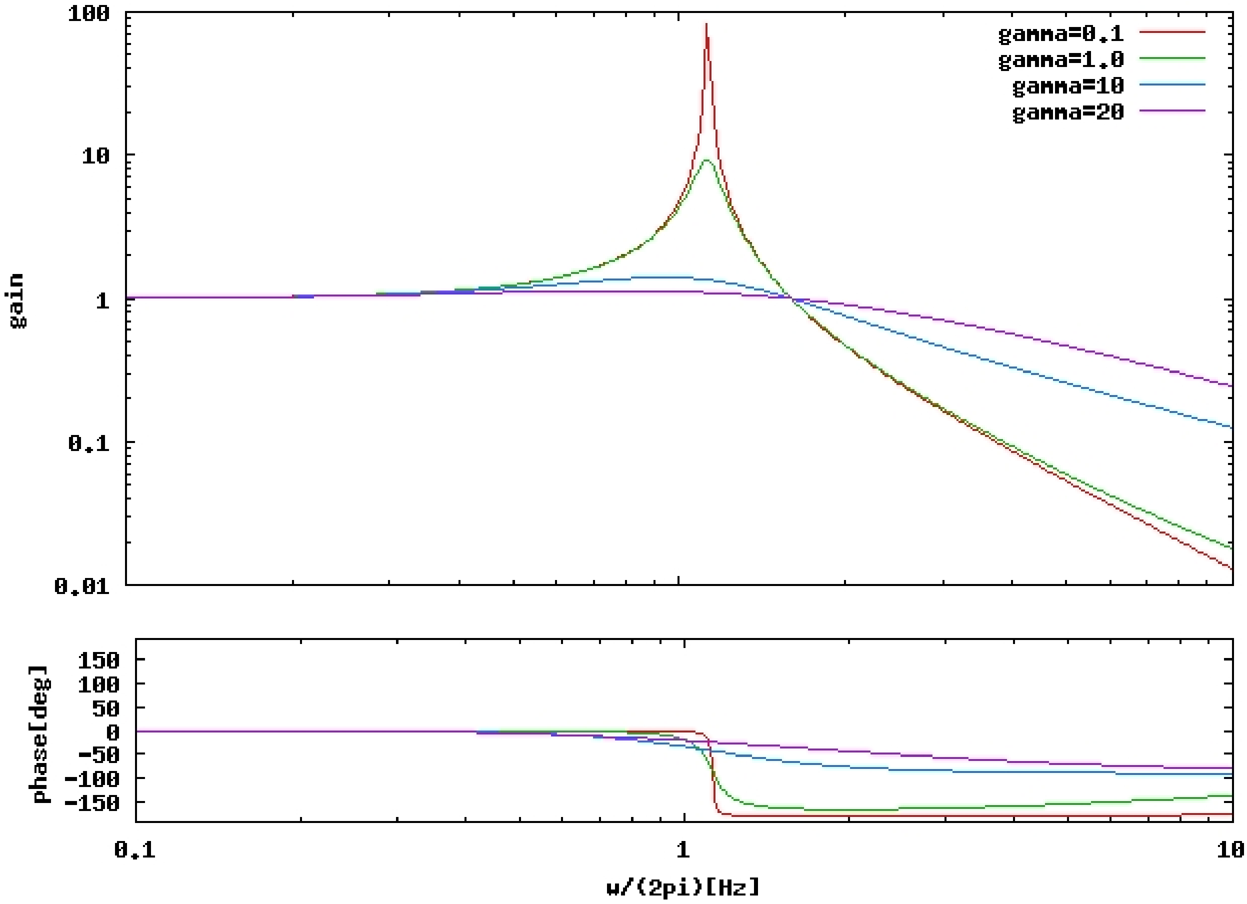

図 3: 単振り子における伝達関数

4　1本吊り2重振り子

次に2重振り子を解く。

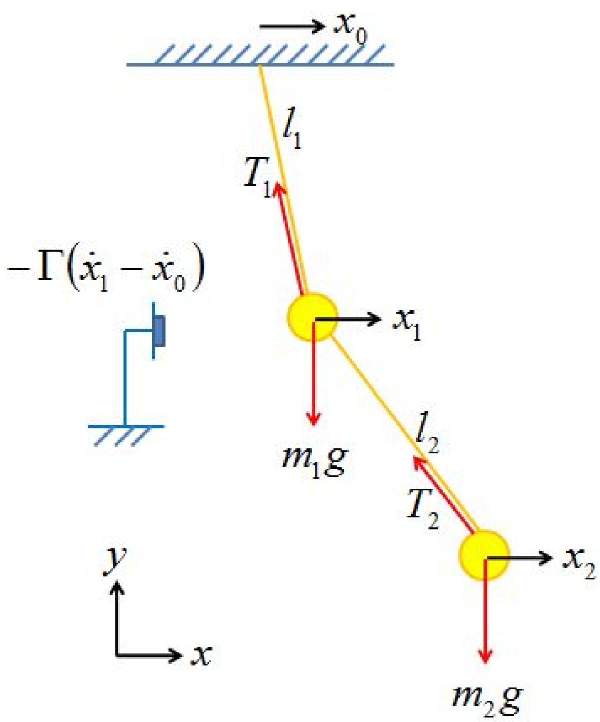

図 4: 1本吊り2重振り子。物体は質点として扱う。

運動方程式をたてると、

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -(m_1+m_2)\frac{g}{l_1}(x_1-x_0)-m_1\Gamma(\dot{x_1}-\dot{x_0})+m_2\frac{g}{l_2}(x_2-x_1) && (11)\\
m_2\ddot{x}_2 &= -m_2\frac{g}{l_2}(x_2-x_1) && (12)
\end{aligned}
$$

となる。これを解く。

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{\frac{g}{l_1}} && (13)\\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{g}{l_2}} && (14)
\end{aligned}
$$

とすると、運動方程式は次の様になる。

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= -\left\{(m_1+m_2)\omega_1^2+m_2\omega_2^2\right\}x_1+m_2\omega_2^2x_2+(m_1+m_2)\omega_1^2x_0-m_1\Gamma\dot{x}_1+m_1\Gamma\dot{x}_0 && (15)\\
m_2\ddot{x}_2 &= m_2\omega_2^2x_1-m_2\omega_2^2x_2 && (16)
\end{aligned}
$$

これをフーリェ変換する。

$$
\begin{aligned}
-m_1\omega^2X_1 &= -\{(m_1+m_2)\omega_1^2+m_2\omega_2^2+im_1\Gamma\omega\}X_1+m_2\omega_2^2X_2+\{(m_1+m_2)\omega_1^2+im_1\Gamma\}X_0 && (17)\\
-m_2\omega^2 &= m_2\omega_2^2X_1-m_2\omega_2^2X_2 && (18)
\end{aligned}
$$

これを行列形式で書くと以下の様になる。

$$
\begin{pmatrix} -\omega^2+\alpha\omega_1^2+\beta\omega_2^2+i\omega\Gamma & -\beta\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & -\omega+\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha\omega_1^2+i\omega\Gamma)X_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}
$$

ここで、

$$\alpha = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \tag{20}$$

$$\beta = \frac{m_2}{m_1} \tag{21}$$

とした。(X_1, X_2) について解く。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det H} \begin{pmatrix} -\omega + \omega_2 & \beta\omega_2^2 \\ \omega_2^2 & -\omega^2 + \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_2^2 + i\omega\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha\omega_1^2 + i\omega\Gamma)X_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

ここで H は式 (19) の左辺の行列を示している。この式から防振比 $Z \equiv \frac{X_2}{X_0}$ を求める。

$$Z = \frac{\omega_2^2(i\Gamma\omega + \alpha\omega_1^2)}{\omega^4 - i\Gamma\omega^3 - \{\alpha\omega_1^2 + (1+\beta)\omega_2^2\}\omega^2 + i\Gamma\omega_2^2\omega + \alpha\omega_1^2\omega_2^2} \tag{23}$$

これをグラフにする。使用したパラメータは以下の通りである。

$$m_1 = m_2 = 1.3[kg] \tag{24}$$

$$l_1 = l_2 = 0.2[m] \tag{25}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.2}} = 7.0[radHz] \tag{26}$$

$$\nu_1 \equiv \frac{\omega_1}{2\pi} = 1.1[Hz] \tag{27}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.2}} = 7.0[radHz] \tag{28}$$

$$\nu_2 \equiv \frac{\omega_2}{2\pi} = 1.1[Hz] \tag{29}$$

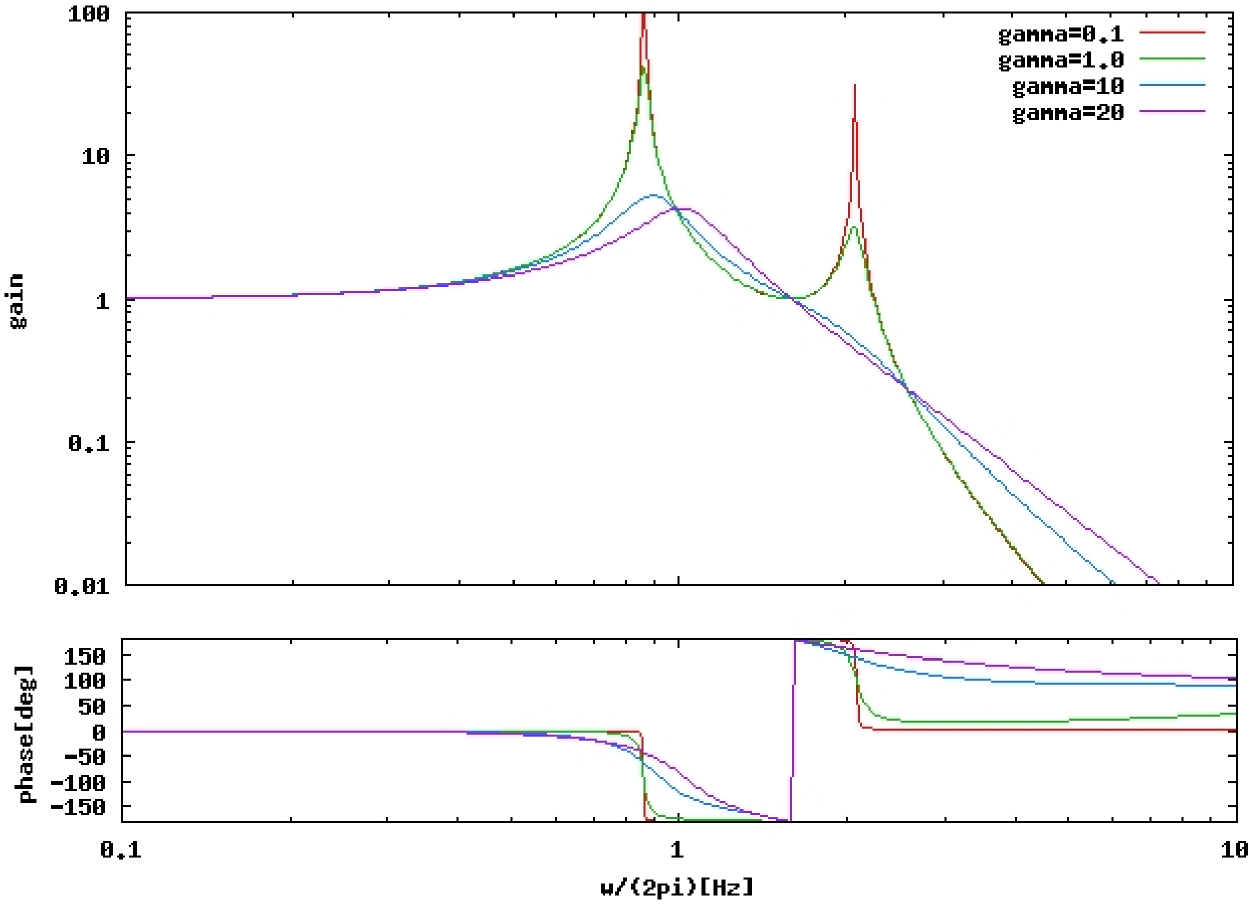

図 5: 1 本吊り 2 重振り子における伝達関数

5　2本吊り単振り子

次に2本吊りの単振り子を考える。

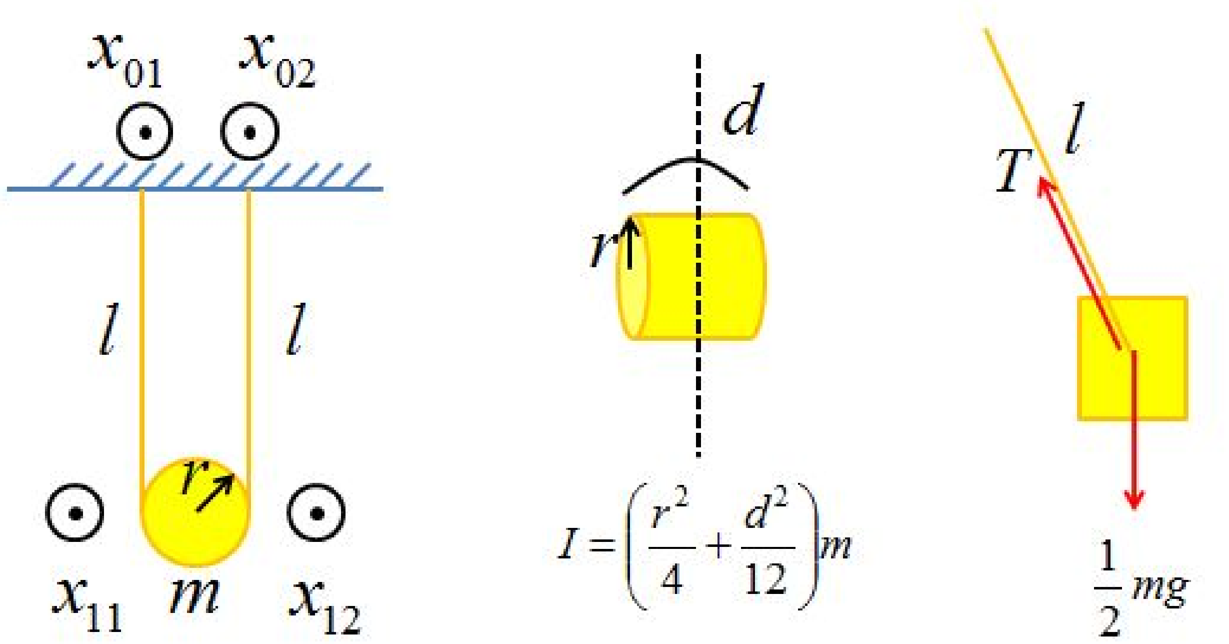

図 6: 2本吊り単振り子。物体は質点として扱う。

上から見て反時計回りを θ の正の回転角とする。まずはダンピングを考えないとすると、その運動方程式は以下の様になる。

$$I\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}m\frac{g}{l}r(x_{11}-x_{01}) + \frac{1}{2}m\frac{g}{l}r(x_{12}-x_{02}) \tag{30}$$

ここで変数 θ を以下のように導入する。

$$\theta_0 = \frac{x_{01}-x_{02}}{2r} \tag{31}$$

$$\theta = \frac{x_{11}-x_{12}}{2r} \tag{32}$$

ここでの θ は先の運動方程式の θ と一致する。すると、運動方程式は以下のように変形できる。

$$I\ddot{\theta} = -mr^2\frac{g}{l}\theta + mr^2\frac{g}{l}\theta_0 \tag{33}$$

これに1本吊りと同様なダンピングの項 $(-\Gamma(\dot{\theta}-\dot{\theta}_0))$ を導入する。

$$I\ddot{\theta} = -mr^2\frac{g}{l}\theta + mr^2\frac{g}{l}\theta_0 - \Gamma(\dot{\theta}-\dot{\theta}_0) \tag{34}$$

これをラプラス変換する。

$$-I\omega^2\Theta = -mr^2\frac{g}{l}\Theta + mr^2\frac{g}{l}\Theta_0 - i\Gamma\omega\Theta + i\Gamma\omega\Theta_0 \tag{35}$$

まとめて、防振比を計算すると、

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{mr^2\omega_0^2 + i\omega\Gamma}{-I\omega^2 + mr^2\omega_0^2 + i\omega\Gamma} \tag{36}$$

となる。これをグラフにした。

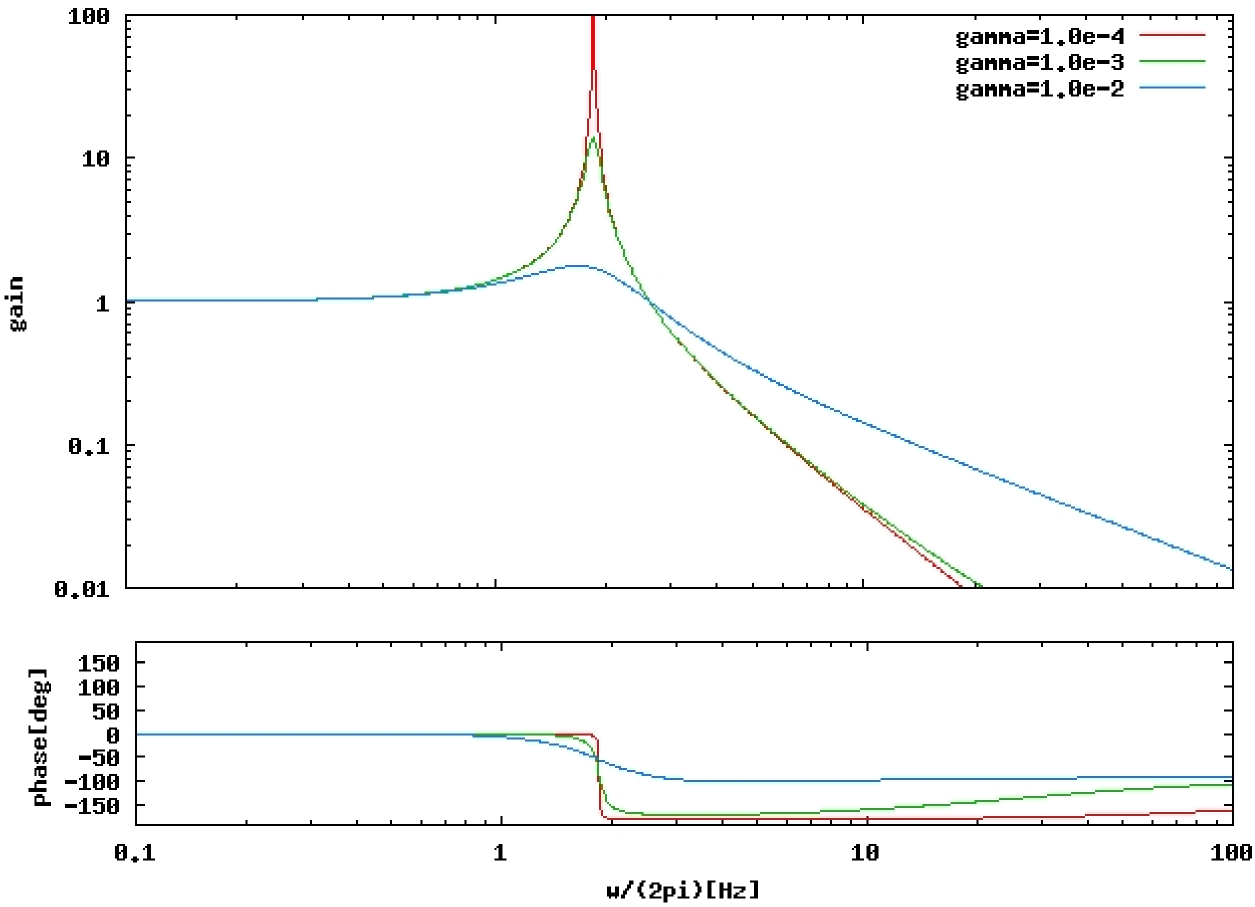

図 7: 2 本吊り単振り子における伝達関数

使用したパラメータは以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
m &= 1.3[kg] && (37)\\
r &= 5[cm] && (38)\\
d &= 6[cm] && (39)\\
I &= \left(\frac{r^2}{4} + \frac{d^2}{12}\right) m && (40)\\
l &= 20[cm] && (41)
\end{aligned}
$$

6　2 本吊り 2 重振り子

次に 2 本吊り 2 重振り子の計算を同様にして行う。

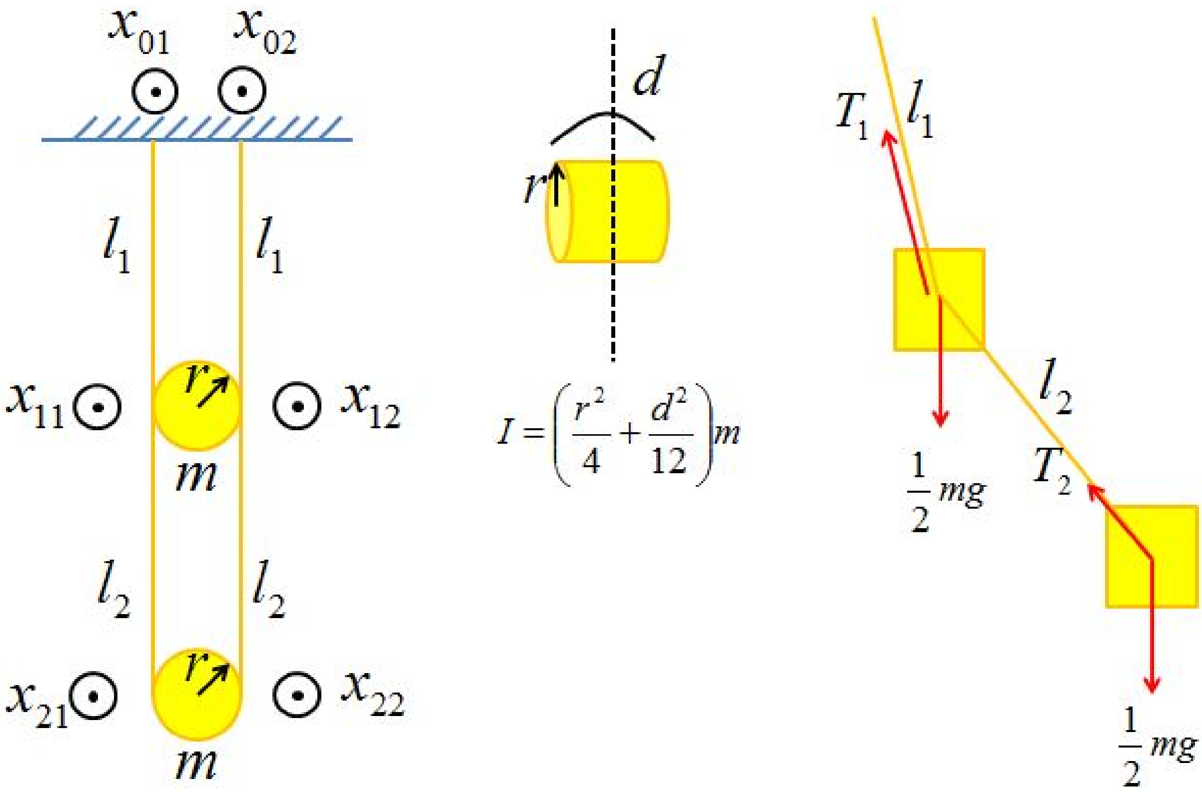

図 8: 2 本吊り 2 重振り子。物体は質点として扱う。

まずはダンピングを考えないで運動方程式をたてる。

$$I\ddot{\theta}_1 = -mg\frac{x_{11}-x_{01}}{l_1}r+\frac{1}{2}mg\frac{x_{21}-x_{11}}{l_2}r+mg\frac{x_{12}-x_{02}}{l_1}r-\frac{1}{2}mg\frac{x_{22}-x_{12}}{l_2}r \quad (42)$$

$$I\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{2}mg\frac{x_{21}-x_{11}}{l_2}+\frac{1}{2}mg\frac{x_{22}-x_{12}}{l_2}r \quad (43)$$

変数を θ に書き換える。

$$\theta_0 = \frac{x_{01}-x_{02}}{2r} \quad (44)$$

$$\theta_1 = \frac{x_{11}-x_{12}}{2r} \quad (45)$$

$$\theta_2 = \frac{x_{21}-x_{22}}{2r} \quad (46)$$

すると、

$$I\ddot{\theta}_1 = -2m\frac{g}{l_1}r^2(\theta_1-\theta_0)+m\frac{g}{l_2}r^2(\theta_2-\theta_1) \quad (47)$$

$$I\ddot{\theta}_2 = m\frac{g}{l_2}r^2(\theta_1-\theta_2) \quad (48)$$

となる。この式はさらに、

$$\omega_1 \equiv \sqrt{\frac{g}{l_2}} \quad (49)$$

$$\omega_2 \equiv \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad (50)$$

とすれば、次のようにかける。

$$I\ddot{\theta}_1 = -2mr^2\omega_1^2(\theta_1-\theta_0)+mr^2\omega_2^2(\theta_2-\theta_1) \quad (51)$$

$$I\ddot{\theta}_2 = mr^2\omega_2^2(\theta_1-\theta_2) \quad (52)$$

ここに中段マスにダンピング $(-\Gamma(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_0))$ を入れる。

$$
\begin{aligned}
I\ddot{\theta}_1 &= -2mr^2\omega_1^2(\theta_1-\theta_0)+mr^2\omega_2^2(\theta_2-\theta_1)-\Gamma(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_0) && (53)\\
I\ddot{\theta}_2 &= mr^2\omega_2^2(\theta_1-\theta_2) && (54)
\end{aligned}
$$

あとはこれを例のようにラプラス変換して解くだけ。ラプラス変換すると、

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 I\Theta_1 &= -2mr^2\omega_1^2(\Theta_1-\Theta_0)+mr^2\omega_2^2(\Theta_2-\Theta_1)-i\Gamma\omega(\Theta_1-\Theta_0) && (55)\\
-\omega^2 I\Theta_2 &= mr^2\omega_2^2(\Theta_1-\Theta_2) && (56)
\end{aligned}
$$

行列で表す。

$$
\begin{pmatrix} -\omega^2 I+2mr^2\omega_1^2+mr^2\omega_2^2+i\Gamma\omega & -mr^2\omega_2^2 \\ mr^2\omega_2^2 & \omega^2 I-mr^2\omega_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2mr^2\omega_1^2+i\Gamma\omega)\Theta_0\\ 0\end{pmatrix} \tag{57}
$$

防振比 $\frac{\Theta_2}{\Theta_0}$ について解くと、

$$
\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\mathrm{det}H}\begin{pmatrix}\omega^2 I-mr^2\omega_2^2 & mr^2\omega_2^2\\ -mr^2\omega_2^2 & -\omega^2 I+2mr^2\omega_1^2+mr^2\omega_2^2+i\Gamma\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2mr^2\omega_1^2+i\Gamma\omega)\Theta_0\\ 0\end{pmatrix} \tag{58}
$$

となるから、

$$
Z\equiv\frac{\Theta_2}{\Theta_0}=\frac{-mr^2\omega_2^2(2mr^2\omega_1^2+i\Gamma\omega)}{\alpha(\omega^2 I-mr^2\omega_2^2)+m^2r^4\omega_2^4+i\Gamma\omega(\omega^2 I-mr^2\omega_2^2)} \tag{59}
$$

となる。ここで α は、

$$
\alpha=-\omega^2 I+2mr^2\omega_1^2+mr^2\omega_2^2 \tag{60}
$$

である。これをグラフにする。なお使用したパラメータは以下である。

$$
\begin{aligned}
m &= 1.25[kg] && (61)\\
r &= 5[cm] && (62)\\
d &= 6[cm] && (63)\\
I &= \left(\frac{r^2}{4}+\frac{d^2}{12}\right) && (64)\\
l_1 &= 18[cm] && (65)\\
l_2 &= 18[cm] && (66)
\end{aligned}
$$

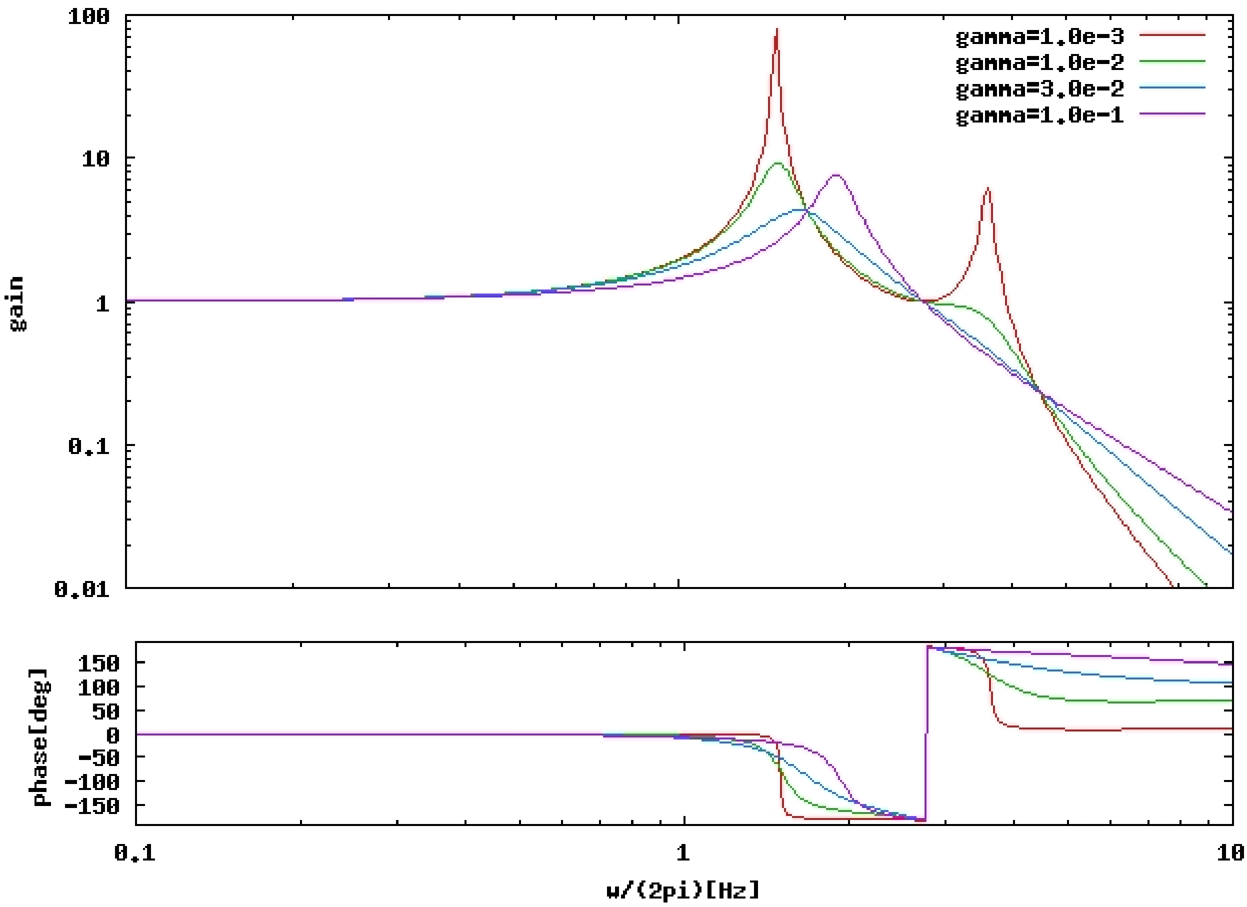

図 9: 2 本吊り 2 重振り子における伝達関数

結果を見ると、ダンピングが少ないときには $1.5Hz$ と $3.6Hz$ に共振が表れている。ダンピングが効いてくると、次第に $3.6Hz$ のピークは均され、$1.5Hz$ にあったピークも減少し、高周波に移動していく。

4 本吊りの計算はまた今度。