

Gouy Phase

チン タン

2010/5/28

1 はじめに

今後行うこと

- Current LCGT design の理解
- Stable unfolded cavity design
- Stable folded cavity design

以上のことを行うにあたって、Gouy Phase の計算が必要になる。

まずは LCGT のパラメータを記しておく。(LCGT wiki より)

- PRC Total length = 73.2826m
- SRC Total length = 73.2826m
- ITM ROC = 7114m
- ETM ROC = 7114m
- Arm cavity length = 3km

2 Gouy Phase Shift の意味

まずは Gouy Phase Shift について。

Gaussian beam は伝搬していくにつれて、平面波との phase のずれが生じてくる。これを Gouy Phase Shift という。phase とは位相であるが、位相のずれとは？ Gaussian beam と plane wave が同じ時刻に同じ地点から放射されたとする。最初の位相は同じであるとする、伝搬して行くときに、ある時刻、ある地点で見たときに、二つの位相がずれる。例えば円偏光の場合には電場の向きが違っているとかなる。そのずれは以下の式で表わされる。単位はラジアンである。

$$\phi_G(z) = -\arctan \frac{z}{z_R} \quad (1)$$

ここで z_R は Rayleigh length であり、 z は位置を示していて、 $z = 0$ のときにはそれは beam waist を表わしている。

Gaussian beam とは power の分布が光軸を中心に次のように Gaussian function のように分布する beam のことである。Gaussian の強度分布は

$$I(r, z) = \frac{P}{\pi w(z)^2/2} \exp\left(-2\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \quad (2)$$

である。電場の分布は

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-i\left[kz - \arctan \frac{z}{z_R} + \frac{kr^2}{2R(z)}\right]\right) \quad (3)$$

である。ここで beam radius $w(z)$ は光軸からの特徴的な距離である。また $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ である。

Rayleigh length とは beam radius が beam waist 地点の beam radius の $\sqrt{2}$ 倍になった距離のことをいう。

Gaussian beam では次のように beam waist の beam radius w_0 と波長 λ によって次に様に表わされる。

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (4)$$

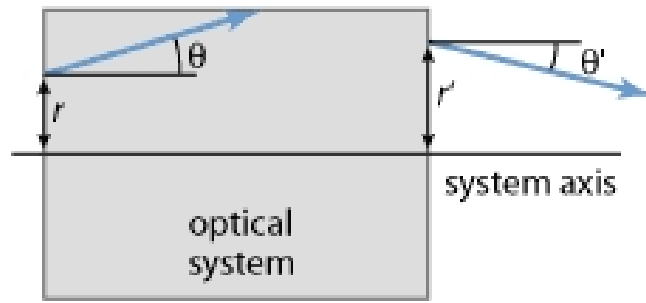
なお波長 λ は真空における波長を屈折率 n で割ったものである。一方で平面波の電場分布は時間の成分を考えなければ、

$$E(z) = E_0 \exp(ikz) \quad (5)$$

である。この二つの電場の式を見ると、その差は確かに $-\arctan \frac{z}{z_R}$ であることがわかる。 $(R \rightarrow \infty)$

3 ABCD マトリックスの意味

ABCD マトリックスについて。



コンセプトとしては図のように幾何学的な光線の伝搬を計算するためのものである。角度 θ が小さければ、 r と θ は線形な変化をおこす。これを式にすると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

例えば焦点距離 f の薄レンズを通過する場合には以下のような行列となる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

距離 d の free space を通過する場合には

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。

free space を通って、レンズを通して、さらに free space を通るような場合には、行列のかけ算をしてあげれば良い。

Gaussian beam の場合には w や波面の曲率半径 R を一つの複素数 q で次のように表す。

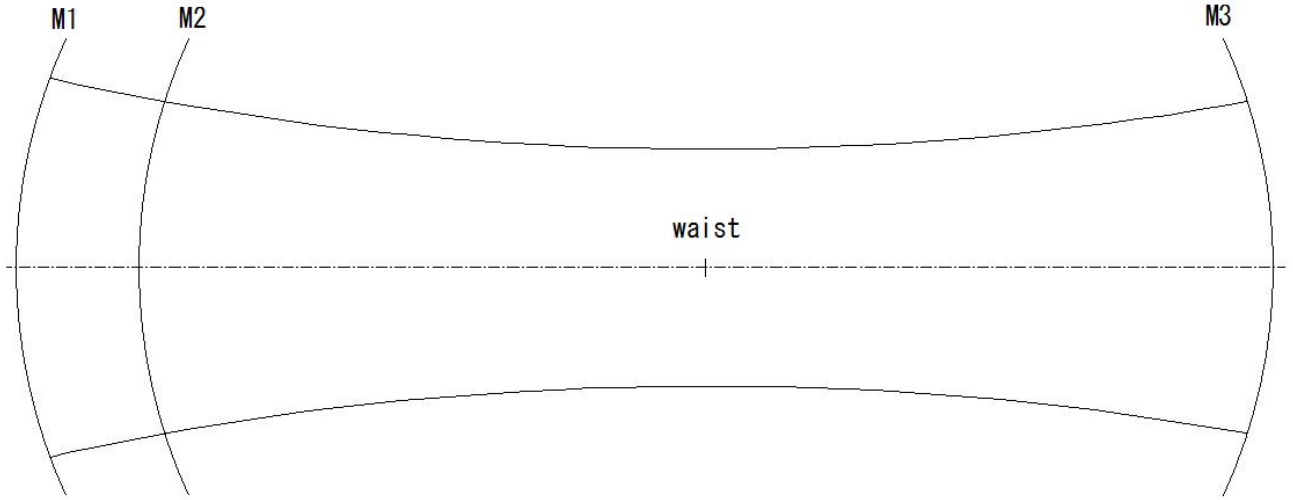
$$\frac{1}{q} = -i \frac{\lambda}{\pi w^2} + \frac{1}{R} \quad (9)$$

この q の伝搬が次のように ABCD 行列で行われる。

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (10)$$

4 M1 と M2 の間の Gouy Phase Shift

以上のことを使って、実際の LCGT における Gouy Phase を計算する。



図において M2 から M3 までの距離は 3006.69m で、 z_R は 2904.24m とする。

まず M2-M3 での phase のズレを計算してみると、

$$\phi_{2-3} = -\arctan\left(\frac{3006.69/2}{2904.24}\right) \times 2 \quad (11)$$

$$= 0.955 \text{ rad} = 54.7^\circ \quad (12)$$

最後に 2 をかけたのは cavity 全体を計算したため。

次に M1 と M2 の間での Gouy Phase を計算する。

$$\phi_{1-2} = -\arctan\left(\frac{3006.67/2 + 73.2826}{2904.24}\right) + \arctan\left(\frac{3006.69/2}{2904.24}\right) \quad (13)$$

$$= 0.020 \text{ rad} = 1.2^\circ \quad (14)$$

この数字はとても小さい。このままでは M1 と M2 のミラーの区別が観測的に付けがたい。(縮退に近い)

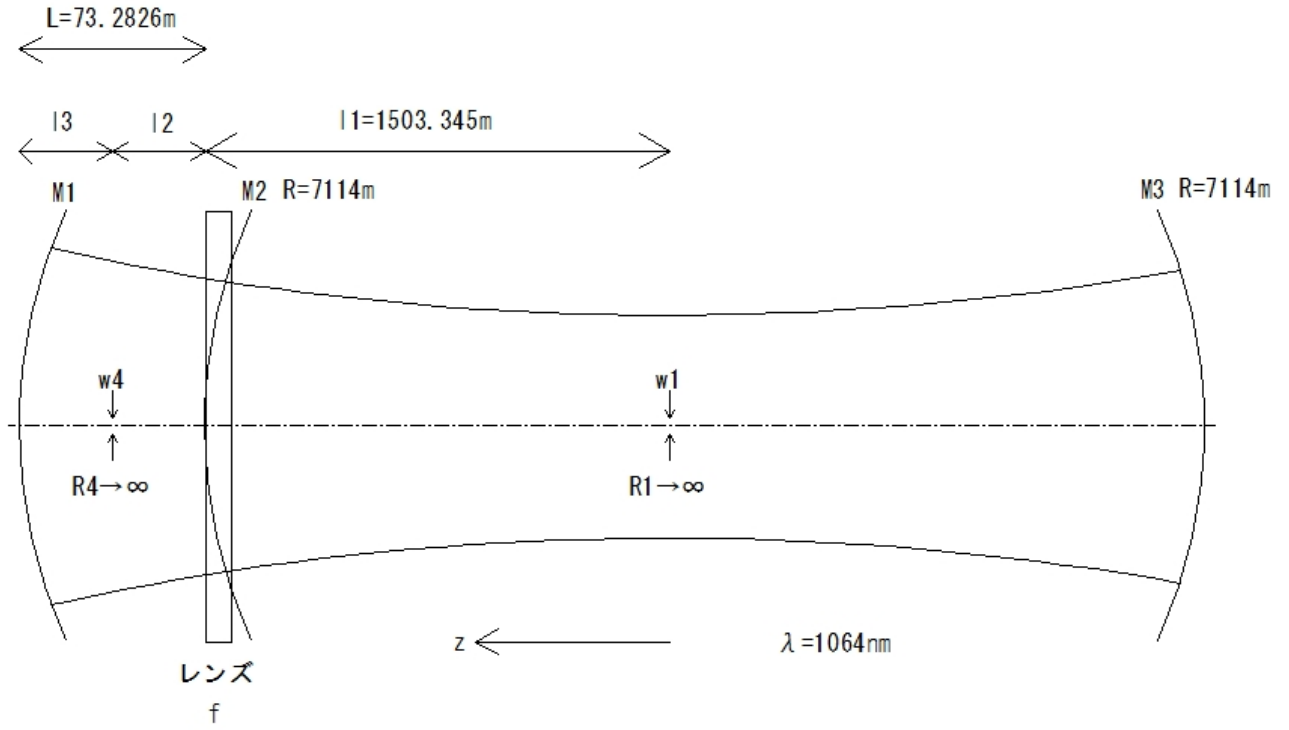
またビームが鏡にあたることで鏡に温度勾配ができ、屈折率分布が発生してしまう。これを熱レンズ現象という。(低温サファイヤは熱伝導度が 2 桁程良いので温度差が少なく、実用上問題とならない程度の熱レンズしか発生しない。) M2 の曲率半径は $R = 7\text{km}$ であり、ちょっとした屈折率の違いでもばかにならない。つまり 1.2° を測定しようとする、この熱レンズに埋もれてしまう。このことから、どうにかして ϕ_{1-2} を 20° にしたい。 $\phi_{1-2} = 20^\circ$ であれば alignment sensing において M1, M2 の角度変動を区別できる。(縮退がとける)

参考

Encyclopedia of Laser Physics and Technology

5 M2 の位置にレンズを入れた場合の gouy phase shift

M2 の位置に焦点距離が f のレンズを入れた場合を考える。記号を以下のように定める。



これから、ウエスト w_4 の位置と大きさを求める。

まずは w_1 の値を求める。g-factor はそれぞれ、

$$g_2 = g_3 = 1 - \frac{2l_1}{R} \equiv g \quad (15)$$

である。これより waist の半径 w_1 は次のように計算できる。

$$w_1^2 = \frac{2l_1\lambda}{\pi} \frac{\sqrt{g^2(1-g^2)}}{|2g-2g^2|} \quad (16)$$

次に w_1 から w_4 までの間の ABCD matrix を求める。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_2}{f} & \left(1 - \frac{l_2}{f}\right)l_1 + l_2 \\ -\frac{1}{f} & -\frac{l_1}{f} + 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

この行列を使って w_4 における q_4 を求める。

$$\frac{1}{q_1} = -i \frac{\lambda}{\pi w_1^2} + \frac{1}{R_1} \quad (19)$$

$$= -i \lambda \pi w_1^2 \quad (20)$$

$$\Rightarrow q_1 = i \frac{\pi w_1^2}{\lambda} \quad (21)$$

$$= iz_{R1} \quad (22)$$

ここで、

$$L_{12} \equiv \left(1 - \frac{l_2}{f}\right)l_1 + l_2 \quad (23)$$

とすると、

$$q_4 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (24)$$

$$\frac{1}{q_4} = \frac{-\frac{1}{f}q_1 - \frac{l_1}{f} + 1}{\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)q_1 + L_{12}} \quad (25)$$

$$= iz_{R1} \frac{\frac{L_{12}}{f} + \left(1 - \frac{l_1}{f}\right)\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)}{-\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)^2 z_{R1}^2 - L_{12}^2} + \frac{\frac{1}{f}\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)z_{R1}^2 - L_{12}\left(1 - \frac{l_1}{f}\right)}{-\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)^2 z_{R1}^2 - L_{12}^2} \quad (26)$$

と q_4 が求まる。ここで R_4 が無限大のため、 q_4 の実数部分は 0 にならなくてはならない。よって

$$l_2 = \frac{l_1\left(1 - \frac{l_1}{f}\right) - \frac{z_{R1}^2}{f}}{-\frac{z_{R1}^2}{f^2} - \left(1 - \frac{l_1}{f}\right)^2} \quad (27)$$

次に w_4 を求める。 $\frac{1}{q_4}$ の虚数部分に w_4 が含まれているから、

$$-i\frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{w_4^2} = iz_{R1} \frac{\frac{L_{12}}{f} + \left(1 - \frac{l_1}{f}\right)\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)}{-\left(1 - \frac{l_2}{f}\right)^2 z_{R1}^2 - L_{12}^2} \quad (28)$$

$$w_4 = \sqrt{\frac{\lambda \left\{ \left(1 - \frac{l_2}{f}\right)^2 z_{R1}^2 + L_{12}^2 \right\}}{\pi z_{R1} \left\{ \frac{L_{12}}{f} + \left(1 - \frac{l_1}{f}\right)\left(1 - \frac{l_2}{f}\right) \right\}}} \quad (29)$$

この場合の Rayleigh length z_{R4} は次に様になる。

$$z_{R4} = \frac{\pi w_4^2}{\lambda} \quad (30)$$

これより gouyphase shift の計算をしてみると、

$$\phi = \arctan\left(\frac{l_2}{z_{R4}}\right) - \arctan\left(\frac{L - l_2}{z_{R4}}\right) \quad (31)$$

となる。

以上の式を使って、実際の値を代入して、 $w_1, z_{R1}, l_2, w_4, z_{R4}, \phi$ を求めた。

l_1	1503.345 m	R	7116.4 m
λ	1.064×10^{-6} m	L	73.2826 m

f [m]	w_1 [m]	z_{R1} [m]	l_2 [m]	w_4 [mm]	z_{R4}	ϕ [deg]
78.4	0.03137	2904.9	79.2	0.760	1.71	14.8
77.6	0.03137	2904.9	78.4	0.752	1.67	16.8
76.7	0.03137	2904.9	77.5	0.743	1.63	19.9