

目 次

1	目的と概要	2
2	Maxwell 方程式から波動方程式まで	2
2.1	一般的な場合	2
2.2	単一偏光で、 z 軸方向に進んでいる場合	3
3	基本ガウシアンモード	3
4	参考文献	4

ガウシアンビーム (Gaussian Beam) について

東京大学理学系研究科天文学専攻 35-106130 チン タン

2010/

1 目的と概要

重力波観測器ではレーザーを使ってその観測を行っている。レーザーはガウシアンビームであり、その性質は非常に重要である。そこで本レポートではガウシアンビームの性質をまとめておく。このレポートを仕上げることでガウシアンビームに対する理解が深まり、後にも残せると考えたのでレポートにした。

まずは、ガウシアンビームを電磁気学から導き、Gouy phase や高次モードを説明し、その後に光軸から少しずれた場合にガウシアンビームの電場の空間分布がどうなるかを説明する。

2 Maxwell 方程式から波動方程式まで

2.1 一般的な場合

まずは Maxwell 方程式から波動方程式を導く。真空中での Maxwell 方程式はいくつかの実験から以下のようになっている。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、電場が $\mathbf{E}$ 、磁場が $\mathbf{B}$ 、 ϵ_0 と μ_0 がそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。値はそれぞれ $8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N}/\text{m}^2$ と $4\pi \times 10^{-7} \text{N}/\text{A}^2$ である。

波動方程式を求める。まずは電場に関して、式 1、式 2 より、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (5)$$

$$= -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (7)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (9)$$

となる。同様にして、磁場は次の様になる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad (10)$$

$$= -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (11)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (12)$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (13)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (14)$$

以上から式 9 と式 14 が導けたわけである。この二式はそれぞれ電場と磁場が波のように伝わっていくことを示している。つまりある地点で電場 (磁場) を観測していると、その値は正規関数的に時間変化し、時間を止めて空間を移動していくと、やはり正規関数的に変化する。

この二つの波動方程式において、伝搬速度が光速 c であることがわかってるので、 c で書き直すと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (16)$$

となる。

以下では電場についてのみ考えることにする。

2.2 単一偏光で、 z 軸方向に進んでいる場合

単一偏光で、かつ等位相面の法線がほぼ単一方向に揃っている場合には、電場をスカラー関数 $u(t, x, y, z)$ で近似することができる。さらに波が z 軸方向に進んでいると仮定して次のようにおく。

$$u(t, x, y, z) = \psi(x, y, z) \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) \quad (17)$$

これを波動方程式に代入してみると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) e^{i\omega_0 t - ik_0 z} = \frac{1}{c^2} \psi e^{-ik_0 z} \frac{\partial^2 e^{i\omega_0 t}}{\partial t^2} \quad (18)$$

これを計算すると次の様になる。まずは右辺。

$$\frac{1}{c^2} \psi e^{-ik_0 z} \frac{\partial^2 e^{i\omega_0 t}}{\partial t^2} = -\frac{\omega_0^2}{c^2} \psi e^{i\omega_0 t - ik_0 z} \quad (19)$$

次に左辺。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi e^{i\omega_0 t - ik_0 z} = e^{i\omega_0 t - ik_0 z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi e^{i\omega_0 t - ik_0 z} = e^{i\omega_0 t - ik_0 z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi e^{i\omega_0 t - ik_0 z} = e^{i\omega_0 t - ik_0 z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - k_0^2 \psi \right) \quad (22)$$

以上から波動方程式は次の様になる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x, y, z) = 0 \quad (23)$$

なおここで $k_0 = \omega_0/c$ を使用した。ここで z 軸方向のビーム包絡線の変化が十分に穏やかであると仮定し、 $|\partial \psi / \partial z| \ll k_0 \psi$ であると仮定すると方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x, y, z) = 0 \quad (24)$$

となる。この近似は近軸近似と呼ばれ、方程式 24 を近軸スカラー方程式という。この方程式はちょうど 2 次元自由空間のシュレディンガー方程式の時間座標を空間座標 z で置き換えた方程式と同じ形をしている。

以上では Maxwell 方程式から電磁波の方程式を導き出し、さらに近軸近似を行い、その方程式を導いた。これからはこの近軸スカラー方程式を解いていく。

3 基本ガウシアンモード

式 24 をフーリエ変換によって求める。フーリエ変換、及びその逆変換を次のように定義する。

$$\tilde{\psi}(\nu_x, \nu_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(x, y, z) \exp(-i\nu_x x - i\nu_y y) \quad (25)$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y \tilde{\psi}(\nu_x, \nu_y, z) \exp(i\nu_x x + i\nu_y y) \quad (26)$$

これを使って、式 24 をフーリエ変換すると、例えば一項目が、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{-i\nu_x x - i\nu_y y} = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\nu_y y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{-i\nu_x x} dx \quad (27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\nu_y y} \left[\left(e^{-i\nu_x x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{-\infty}^{\infty} - (-i\nu_x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-i\nu_x x} dx \right] \quad (28)$$

$$= -\nu_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi e^{-i\nu_x x - i\nu_y y} \quad (29)$$

$$= -\nu_x^2 \tilde{\psi}(\nu_x, \nu_y, z) \quad (30)$$

となるから、結局

$$\left(-\nu_x^2 - \nu_y^2 - 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{\psi}(\nu_x, \nu_y, z) = 0 \quad (31)$$

となる。

この微分方程式は z に関する簡単な方程式である。 $\tilde{\psi}$ について解くと、

$$\tilde{\psi} = A \exp \left(-\frac{\nu_x^2 + \nu_y^2}{2ik_0} z \right) \quad (32)$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi z_R}{k_0}} \exp \left[-\frac{\nu_x^2 + \nu_y^2}{2ik_0} (z - z_0 + iz_R) \right] \quad (33)$$

となる。ここで積分定数 A は複素数であると考え、 z_0, z_R で表した。その範囲は z_0, z_R を変化させることで複素数の全領域にわたる。 z_0, z_R はともに実数で、 z_R は正でなければならない。

次に $\tilde{\psi}$ を逆フーリエ変換させ、 ψ を求める。

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y \tilde{\psi}(\nu_x, \nu_y, z) \exp(i\nu_x x + i\nu_y y) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y \sqrt{\frac{4\pi z_R}{k_0}} \exp \left[-\frac{\nu_x^2 + \nu_y^2}{2ik_0} (z - z_0 + iz_R) \right] \exp(i\nu_x x + i\nu_y y) \quad (35)$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi z_R}}{4\pi^2 \sqrt{k_0}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_y \exp(-\alpha \nu_y^2 + i\nu_y y) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x \exp(-\alpha \nu_x^2 + i\nu_x x) \quad (36)$$

ここで $\alpha = \frac{z - z_0 + iz_R}{2ik_0}$ とした。 ν_x の積分のみを行ってみると、平方完成とガウス積分を利用して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x e^{-\alpha \nu_x^2 + i\nu_x x} = e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_x e^{-\alpha \nu_x^2} \quad (37)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (38)$$

となる。 ν_y での積分も同じようになるので、 ψ は次のように求まる。

$$\psi^{\text{FG}}(x, y, z) = \frac{\sqrt{4\pi z_R}}{4\pi^2 \sqrt{k_0}} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{1}{4\alpha}(x^2 + y^2)} \quad (39)$$

$$= \sqrt{\frac{k_0}{\pi z_R}} \frac{iz_R}{z - z_0 + iz_R} \exp \left(-\frac{ik_0}{z - z_0 + iz_R} \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad (40)$$

この解は基本ガウスモード (Fundamental Gaussian mode) とよばれ、近軸スカラー波動方程式の解である。なお、式 33 の右辺に、 ν_x, ν_y を含むが z には依存しない関数を掛けてもやはり式 31 を満たす。したがって、 ν_x, ν_y の任意関数を $\tilde{\psi}$ に掛けて逆フーリエ変換することにより、いくらでも複雑な強度分布をもつビーム解を作ることができる。このようにして得られる解が、高次モードである。

4 参考文献

1. 竹野耕平「光共振器におけるモード不整合検出法の研究 (卒業論文)」(Btakeno.pdf)
2. 丹羽佳人「レーザー干渉計型高精度角度変動モニターの研究開発 (修士論文)」(niwa_m.pdf)