

基礎レクチャー 9/2 の分 (世界の地上重力波検出器)

東京大学理学系研究科天文学専攻 M1 チン タン

2010/9/2

1 いくつかの S/N なら OK? これをどう見積もる?

重力波干渉計の感度は例えば以下の図のようなものである。

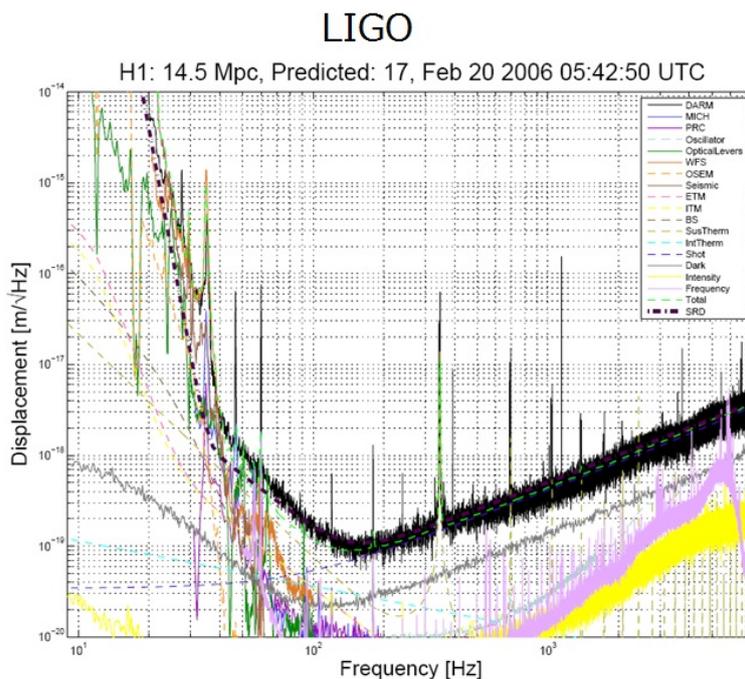


図 1:

この図で黒い線が実際の感度となる。横軸の単位は Hz で縦軸の単位は $\frac{m}{\sqrt{Hz}}$ である。縦軸がこの単位であること
の理由は前回のレクチャーのレポートにある。

今この感度曲線において 100Hz-200Hz の部分のみを取り出してみることにする。これは例えばバンドパスフィル
ターを付けるようなものである。すると振動が以下のようなになったとする。

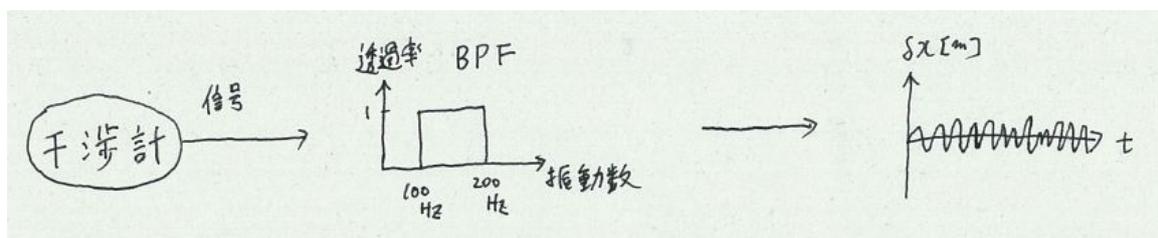


図 2:

この図の一番右は変移 (x) の時間にたいする揺れである。この揺れがどのくらいあるかというのは次のように計算できる。この抜き出した部分 (100Hz-200Hz) での干渉計の感度は $10^{-19}[m/\sqrt{Hz}]$ であるから、揺れ x_{rms} は、

$$x_{rms} = 10^{-19} \times \sqrt{100} \quad (1)$$

$$= 10^{-18}[m] \quad (2)$$

となる。つまり LIGO の雑音は大体 $10^{-18}m$ あるということである。

では、例えば $10x_{rms}$ が干渉計の雑音の信号として出てくることはありえるのか? 答えは、観測時間や雑音の Non-Gaussian 分布によってあったりなかったりする。なぜか?

まずは、観測時間について。雑音というのはランダムに起こると考えると観測時間が長ければ、 $10x_{rms}$ の雑音が増えてもおかしくないのである。

つぎに Non-Gaussian について。普通の雑音は以下のように Gaussian の形をしている。

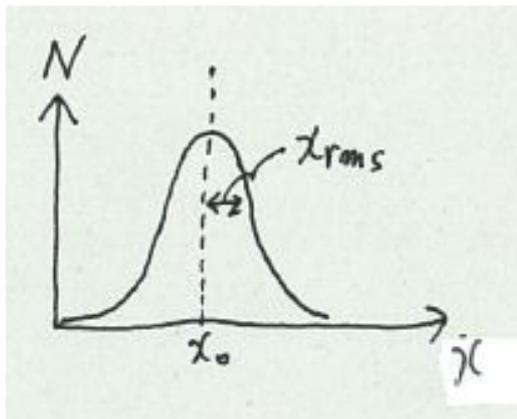


図 3:

この図が意味していることは、 x は $x = x_0$ を中心に x_{rms} の幅を持って揺れているということである。つまり x の値は $x = x_0$ であることが多いが時おり、ちよいとずれる。だがそのずれは大体幅 x_{rms} の範囲に入っている。このグラフの曲線は Gaussian 分布と呼ばれる曲線である。このためこれを雑音が Gaussian の形をしているという。でも実際の干渉計には Gaussian でない形 (例えば以下のような) の雑音も入ってくることがある。

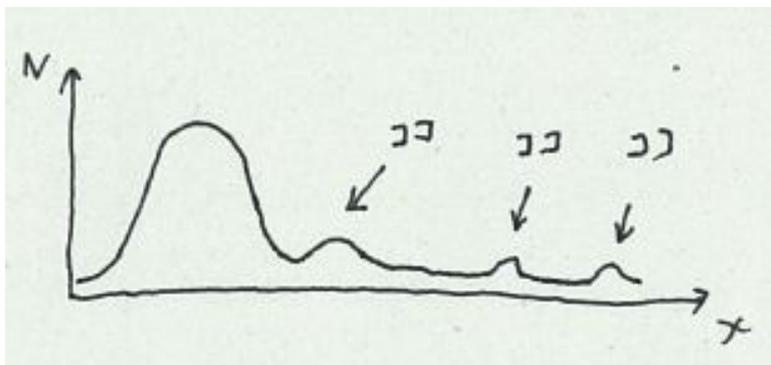


図 4:

これは例えば、誰かが足で干渉計を蹴ったとか、そういうの。

ではこのような雑音と、実際の重力波信号を区別するためにはどうしたらよいのか。

その一つの方法としては、距離的に離れた二つ以上の干渉計で信号を捕らえるのがある。え... つまり二つの干渉計が同時に蹴られることは考えに難い。

もう一つの方法は、干渉計の S/N を上げることである。S/N とは見たい信号と雑音の比である。(S が Signal、N が Noise) 例えば S/N が 10 くらいあれば、1 年間の観測では $10x_{rms}$ の大きさの雑音はないと考えることができる。でもこれが 10 年とか 100 年とかの観測時間の場合にはありえるかもしれない。

以上から、重力波を捕らえるためには、S/N を上げることが大事になってくる。

ちなみに、 $10^{-19}[m\sqrt{Hz}]$ というのは 1m の長さが変化する量なので、実際の干渉計で得られる長さの変化量は、この値を干渉計の腕の長さ (LIGO ならば 4km) をかけることになる。

2 なぜ共振振動数をさげるか。その方法とは。

重力波干渉計では振り子の共振振動数をさげろさげろといわれている。その理由はなんだろうか。

振り子を考える。振り子が吊る下げられている土台の変動を x 、振り子の変動を y とする。このときに揺れの振動数と y/x をグラフにすると以下ようになる。(オレンジの実線)

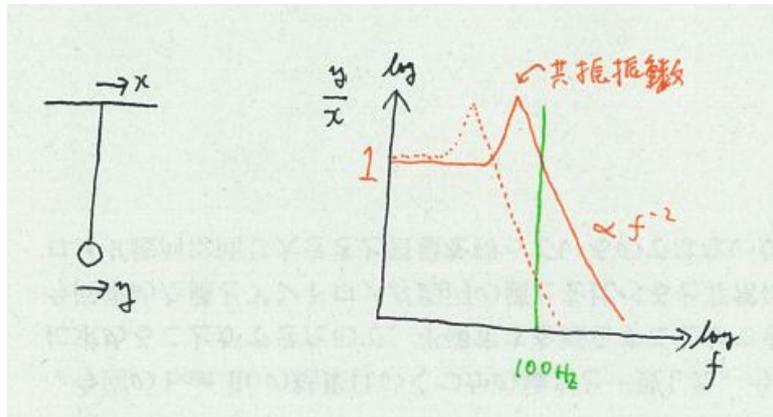


図 5:

振動数が低い場合 (つまり振り子をゆっくり揺らした場合) には、土台の位置変化に振り子がついてきて、 y/x は 1 となる。振動数が共振振動数に来たときには、振り子の揺れは激しくなる。その後は振動数が上昇していくにつれて、 f^{-2} に比例して、振り子の揺れが少なくなっていく。共振振動数を下げるとオレンジの点線のようになる。この二つを比べてみる。例えば、緑色の線を 100Hz としてそこをみると、実線の方が変移の比 y/x が大きい。つまり自分が見たい振動数での雑音を下げることができる。

実際にどのようにして振り子の共振振動数を下げるか。

振り子が横に触れる場合をまず考える。

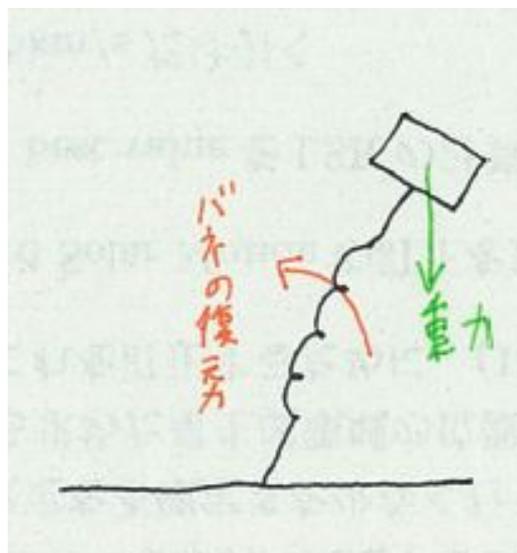


図 6:

この場合にはばねの復元力と重りによる重力によって、全体の復元力を小さくしている。このようにすることで、共振振動数を下げている。TAMA ではこの原理を利用して、名称はI.P.(Inverted Pendulum:倒立振り子)というらしい。

次に縦の振動の場合を考える。例えば、Virgo では以下のように、磁石をつけて、共振振動数を下げている。

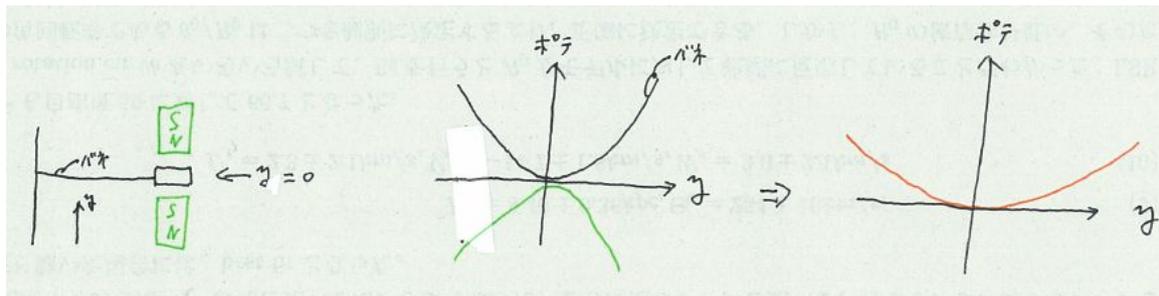


図 7:

図のようにばねのポテンシャルは下に凸のポテンシャルになっている。(黒の線) 一方で磁石によるポテンシャルは上に凸のポテンシャルになっている。(緑の線) その足し合わせがオレンジの線となる。(磁石による力がばねの力よりも小さくなるように調節) オレンジの線を見ると、緩やかなポテンシャルになっている。これは全体としての復元力が小さいことを意味していて、共振振動数が小さいことを示している。

TAMA や LCGT の場合には磁石の代わりに以下のように上に凸のポテンシャルを作っている。

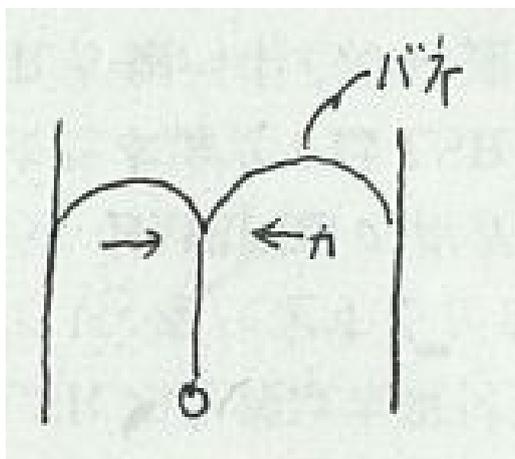


図 8:

ばねを上図のように両側から押すようにして接触させてやると、磁石の場合と同様に上に凸のポテンシャルを作ることができる。これで、共振振動数を下げている。

3 重力波信号をどう引き出してくるか

図 1 にも記述があるように、重力波干渉計の感度を示す指標に Mpc がある。(図 1 では 14.5Mpc) これはその干渉計ではどれくらい遠く中性子連星の合体を観測が可能かを表している。

ではノイズと重力波信号が混ざっている信号からどのようにして重力波信号を取り出してくるか。以下に中性子連星の重力波信号とノイズの信号、それにこの二つが合わさった干渉計からの出力信号を示す。

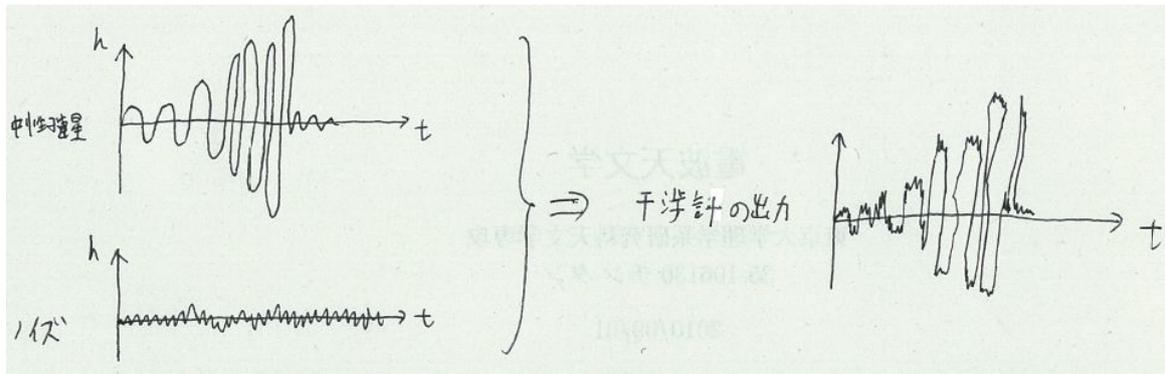


図 9:

干渉計からの出力からどのようにして、重力波信号のみを取り出すか。

数学的に次のようなことを考えてみる。

ある見たい信号が $\sin(\omega t)$ であったとする。この信号をそのまま時間で積分する。(ここでの積分は \sin が \cos になる積分ではなく、時間平均と考えてほしい) すると、 \sin はプラスとマイナスに同じだけ値をとるので、その時間平均は 0 となる。

一方、 $\sin(\omega t)$ の信号に $\cos(\omega t)$ を掛けて、積分 (時間平均) すると、

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2} \quad (3)$$

となるから、この場合でも積分 (時間平均) すると 0 になる。

では、 $\sin(\omega t)$ の信号に同じ振動数の $\sin(\omega t)$ を掛けて、積分 (時間平均) するとどうなるか。

$$\sin(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \quad (4)$$

となる。これを積分 (時間平均) すると、 $\frac{1}{2}$ となる。

実は見たい信号の振動数と違う振動数をかけて積分 (時間平均) してしまうと、0 になる。

以上から重力波干渉計で観測された信号に、予想される重力波の振動数 (テンプレート。テンプレートは正確には予想される重力波の振動数の線型結合的なもの) を掛けて積分 (時間平均) すれば、重力波信号の存在を知る。