相対論ゼミ(11)

２４　平行移動、共変微分、測地系(p140~)

平行移動、共変微分、測地系

任意のベクトル $V^{\mu}(x)$ の微分を考える

$$\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V^{\mu}(x^{\nu}+\varepsilon) - V^{\mu}(x^{\nu})}{\varepsilon} \qquad (24.1)$$

異なる世界点におけるVの差とできるのでこの微分はテンソルにはならない

そこでx→x+ϵまでV(x)を平行移動させた結果を $V^{\mu}(x+\varepsilon)_{//}$ とすると上式は

$$\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V^{\mu}(x^{\nu}+\varepsilon) - V^{\mu}(x^{\nu}+\varepsilon)_{//}}{\varepsilon}$$

これをVの微分とすればこれは座標系に依存しない。ちなみにMinkowski空間では
“平行”は

$$V^{\mu}(x+\varepsilon)_{//} = V^{\mu}(x) \qquad (24.2)$$

しかし、Riemann空間ではどう定義すればよいか？

一般にxからx+⊿xまでVが平行移動したとき、Vの成分が⊿x程度変化すると考えることはMinkowski空間での平行移動の拡張と考えられる。そこで

$$V^{\mu}(x+\Delta x)_{//} - V^{\mu}(x) \equiv \Delta x^{\nu} \boxed{X^{\mu}{}_{\nu\lambda}} V^{\lambda} \qquad (24.3)$$

Xの関数でRiemann空間の性質に依存

次のような一次変換を実現するような例を考える

左図の円錐面を切り取って広げた(α<β)

Vが時計回りに回る

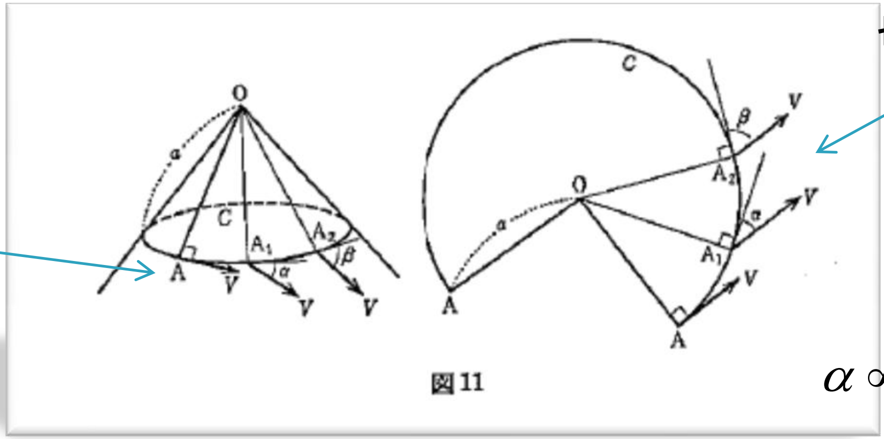

図11

$\alpha \propto (\text{無限小移動量}\overline{AA_1})$

つまり、$V(A_1)_{//}$は$V(A)$に各αの回転という一次変換をほどこした

$$\overset{\text{(平行移動の定義)}}{V^{\mu}(x+\Delta x)_{//}-V^{\mu}(x)\equiv \Delta x^{\nu}X^{\mu}{}_{\nu\lambda}V^{\lambda}}$$ を使うとVの微分が次のようになる

$$\nabla_{\nu}V^{\mu}\equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{V^{\mu}(x+\Delta x)-V^{\mu}(x)}{\Delta x^{\nu}}-X^{\mu}{}_{\nu\lambda}V^{\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}}-X^{\mu}{}_{\nu\lambda}V^{\lambda} \qquad (24.4)$$

これをVの共変微分(covariant derivative)という

上の左辺が一般座標変換に対し混合テンソルであるから右辺のXの係数の変換性がわかる

$$X^{\mu}{}_{\nu\rho}{}'(x')=\frac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}{}'}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\rho}{}'}X^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x)+\frac{\partial^{2}x^{\mu}{}'}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}{}'}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\rho}{}'} \qquad (24.5)$$

これから共変微分を定義できたり、24.4がテンソルとなるためには24.5が満たされればどんなXでもOK。

また、右の2つめの項のせいでXは一般座標変換に対してテンソルでなりえない。
でもアフィン変換なら2項目＝0なのでXはアフィンテンソルになる

上の平行移動の定義からV(x)とV(x＋⊿x)//の線形関係をアフィン接続(affine connection)とよび、Xを接続係数とかアフィン係数(affine coefficient or affinity)という

反変ベクトル以外の量の共変微分は次の規則から定義できる

(i) S がスカラーなら $\nabla_\mu S \equiv \partial S/\partial x^\mu$.

(ii) 2個の任意のテンソル A, B に対して

$$\nabla_\mu(A\cdot B) \overset{d}{\equiv} \nabla_\mu A\cdot B + A\cdot\nabla_\mu B.$$

いま任意のベルトル A^μ, B_μ に対して $S = A^\mu B_\mu$ とおけば, (i), (ii) から

$$\partial_\nu(A^\mu B_\mu) = \nabla_\nu(A^\mu B_\mu) = (\partial_\nu A^\mu - X^\mu{}_{\nu\rho}A^\rho)B_\mu + A^\mu\nabla_\nu B_\mu.$$

この両辺を比べれば共変ベクトルに対する共変微分の定義が導かれる. すなわち

$$\nabla_\nu B_\mu \overset{d}{\equiv} \partial_\nu B_\mu + X^\lambda{}_{\nu\mu}B_\lambda. \qquad (24.6)$$

Riemann幾何学でのV^μの大きさの2乗は $V_\mu V^\mu$ から与えられる。
Euclid幾何学の平行移動に近い定義をRiemann幾何学でも使いたいから次の要請をする

ベクトルの大きさは平行移動に対して不変

これすなわち $g_{\mu\nu}(x+dx)V^\mu(x+dx)_{//}\cdot V^\nu(x+dx)_{//} = g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x)$ (24.8)

代入すると

$$V^\mu(x+\Delta x)_{//} - V^\mu(x) \equiv \Delta x^\nu X^\mu{}_{\nu\lambda}V^\lambda$$

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = -(X_{\mu,\lambda\nu} + X_{\nu,\lambda\mu})$$
$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = -(X_{\nu,\mu\lambda} + X_{\lambda,\mu\nu}) \qquad (X_{\mu,\lambda\nu} \equiv g_{\mu\rho} X^\rho{}_{\lambda\nu}) \qquad (24.9)$$
$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = -(X_{\lambda,\nu\mu} + X_{\mu,\nu\lambda})$$

$X_{\mu,\lambda\nu} = X_{\mu,\nu\lambda}$ と仮定して、下二つの和から一つ目の式を引くと

$$-X_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \equiv \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \qquad (24.9)'$$

$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$も証明できる

つまり、$g_{\mu\nu}$も$g^{\mu\nu}$は定数として扱える

or

$$-X^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho}) \equiv \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \qquad (24.9)''$$

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho,\mu\nu}$$

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} g_{\mu\tau} = 0 \qquad (24.9)'''$$

このΓをChristoffelの3指標記号という。V(x)→V(x+dx)//がΓで定義されるとき
その対応をRiemann接続(connection)という。

おもな公式をΓを使って書き直す

変換則：$\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}{}'(x') = \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\rho'}}\dfrac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\sigma'}}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) - \dfrac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}\dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\rho'}}\dfrac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\sigma'}},$ (24. 5)′

平行移動：$V^{\mu}(x+\Delta x)_{//} \stackrel{\mathrm{d}}{=} V^{\mu}(x) - \Delta x^{\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x)V^{\nu}(x),$ (24. 3)′

共変微分：$\nabla_{\alpha}T^{\mu\nu}{}_{\lambda} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \partial_{\alpha}T^{\mu\nu}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}T^{\beta\nu}{}_{\lambda} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}T^{\mu\beta}{}_{\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\lambda}T^{\mu\nu}{}_{\beta}.$ (24. 7)′

(24.9)’’をλとνについて縮約すると

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\rho} \qquad (24.11)$$

?

計算すると・・・

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \partial_{\mu}\log\sqrt{-g}$$

なお、$g_{\mu\nu}$変分に関して、以下の関係式も使われる。

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \\ \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \\ \delta g &= g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \qquad (24. 13)$$

ここで、Γを使った変換則(24.5)'にはΓに関係しない項がある。このため、ある座標系Sで世界点PにおけるΓの成分に0がなくてもS 'を適当に選べばPにおけるΓ 'の成分を全て0にできる。

さらに $\dfrac{\partial u^{\lambda}}{\partial X^{\mu}}\dfrac{\partial^2 X^{\mu}}{\partial u^{\rho}\partial u^{\sigma}} = \dfrac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\dfrac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \dfrac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\rho}} - \dfrac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\right)$ (19.9) と

$$-X^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(-\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho}) \equiv \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \qquad (24.9)''$$

を見比べて $\dfrac{d^2u^{\lambda}}{d\tau^2} = -\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\sigma}\dfrac{du^{\rho}}{d\tau}\dfrac{du^{\sigma}}{d\tau}$ (19.8)'' から

Γが質点に働く重力を表していることがわかる。つまりS '系はPにおける局所Lorentz変換であることがわかる。幾何学で1点PにおけるΓの成分がすべて0の場合、この座標系はPにおいて測地的(geodesic)であるという。また、この座標系をPにおける測地座標系、測地系(system of geodesic coordinates)という。

等価原理を幾何学的にいえば、任意の世界点で、測地系を設けることが必ずできる。

Einsteinの一般相対論が発表されてから、これをさらに拡張して重力場のみならず電磁場も時空の幾何学的性質に還元しようとする試みがあった。

そんな中でWeylの研究が有名でVベクトルの平行移動で成分が変わるだけでなくその大きさも変わると要請した。つまり、Xが(24.9)'にはならない。
また、$X^{\lambda}{}_{\mu\nu}$のμとνについて非対称である理論もある。

このような種々の接続を考えることにより理論を拡大し、電磁場までも取り入れようとする理論を総称して統一場理論という。
Einsteinも後半生は統一場理論の研究に専念した。

一般相対論に対してEotvosの実験がその裏付けとして重要な役割を演じたが統一場理論ではこれに匹敵する実験的決め手もなく、等価原理のような偉大な指導的原理も見つかっていない。
したがって、今だ満足すべき統一場理論は存在しない。

問1

クリストッフェル記号 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}$ を縮約すると次のようになることを示せ。

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \partial_{\mu} \log \sqrt{-g}$$

ヒント

(24.11)

gの要素$g_{\mu\nu}$に対する余因子は　$gg^{\mu\nu}$だから

$\partial_{\mu} g = gg^{\nu\rho} \partial_{\mu} g_{\nu\rho}$

問２　　以下のモンスターの適切な名称を考えよ

written by R.S.