相対論ゼミ第六回(p88~100)
第Ⅳ章　相対論的力学

14　相対論的運動学
15　力学の基礎方程式の相対論的修正
16　エネルギーおよび運動量

相対論的運動学

Newtonの力学の法則はGalilei変換では不変だが、Lorentz変換に対しては不変でない。

そこでこのNewtonの法則を少し改造して、Lorentz変換に対して不変になるようにしたい。

⇩

質点の運動学の相対論的修正

まず、Newton力学での質点位置はx^k(k=1,2,3)を時間の関数で表している。
でも相対論では時間と空間の区別はいらないので不適当！

そこで、質点の描く世界線の4次元的道のりをパラメタとした4次元座標を導入するのが望ましい。

世界点 x^μ から $x^\mu + \Delta x^\mu$ まで移動した時、両点の世界距離（の二乗）は

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c(\Delta t)^2 + (\Delta \vec{x})^2$$

しかし、ここでは Δx^μ が時間領域のベクトルなので上の世界距離が負になる。

3次元速度が光速より小さいから

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c(\Delta t)^2 + (\Delta \vec{x})^2$$

そこで混乱を避けるために

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta \tau)^2$$

と書き直す

つまり、Lorentz変換に対して不変な実数パラメタτの変化量は

$$\Delta \tau = \Delta t\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \qquad (14.1)'$$

（vは質点の3次元速度）

ここで、S'系から質点を眺めた時、瞬間τではこの質点が静止して見えるからΔτ=Δt'になる
したがって、質点を一緒に運動している時計の示す時間t'はτと同じになる。つまり、各々の質点に結びつけた時計の読みがその質点のτそのもの。このτを質点の固有時間(proper-time)と呼ぶ

さらに、τはLorentz不変だから質点の位置 $x^\mu(\tau)$ の変化率は

x^μと同じ変換性をもっていて反変ベクトル

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \qquad (14.2)$$

であり、これを4元速度(4-velocity)という

そして、(14.1)'を用いれば、この4元速度と3次元速度の関係が導ける

$$u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (14.4)$$

さらにこれから、$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$ (14.5) を導くことができ、u^μ が反変ベクトルであることを利用すると当然、3次元速度の合成則を導くことができる。

次はもちろん、4元加速度(4-acceleration)を導く。その定義は

$$\eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}=-c^2 \qquad (14.5)$$

$$a^{\mu}\equiv\frac{du^{\mu}}{d\tau}=\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}$$

これも当然反変ベクトルで、　恒等式(14.5)から、a^{μ} とu^{μ} は直交する。つまり、

$$\eta_{\mu\nu}u^{\mu}a^{\nu}\equiv 0 \qquad (14.6)$$

となり、これは(14.5)をτについて微分すれば求められる。
そして、4元加速度と3次元加速度との関係は

$$a=(a^1,a^2,a^3)=\frac{1}{(1-\beta^2)}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{c^2(1-\beta^2)^2}v(v\cdot\frac{dv}{dt})$$

$$a^0=\frac{1}{c(1-\beta^2)^2}(v\cdot\frac{dv}{dt}), \qquad (\beta=\left|\frac{v}{c}\right|)$$

となる

力学の基礎方程式の相対論的修正

Lorentz変換はS’の速度がcに比べて十分小さくなるとGalilei変換に近づく。
じゃ、Lorentz変換に対して不変にした新Newtonの方程式も質点の速さがCに比べて十分小さい時は新Newton方程式も元の方程式も差異が無くなるんじゃないか？

ここで、大前提として次のような要請をする

S’系から質点を見たとき、いつでもそれは静止していたとする。

この静止系では、質点の運動について以下のNewton方程式が瞬間的に成り立つとする。

$$m\frac{d^2x^{k}{}'}{dt'^2}=F^{k}{}', \qquad \frac{dx^{k}{}'}{dt'}=0 \qquad (k=1,2,3) \qquad (15.1)$$

この式にさらに

$$m\frac{d^2x^{0}{}'}{dt'^2}=F^{0}{}'(=0) \qquad \left(\frac{d(ct')^2}{dt'^2}=0\right) \qquad (15.2)$$

を追加すれば

3次元ベクトルで表されたF’を4次元的に拡張できる。なので、S’の基礎方程式は

$$m\frac{d^2x^{\mu}{}'}{dt'^2}=F^{\mu}{}' \qquad (\mu=0,1,2,3) \qquad (15.3)$$

と、まとめることができる。
ここで、

S'系がこの瞬間だけ質点の静止系であること(t'=τ)を思い出せば、

$$m\frac{d^2 x^{\mu}{}'}{dt'^2} = F^{\mu}{}' \quad (15.3) \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{d^2 x^{\mu}{}'}{d\tau^2} = F^{\mu}{}' \quad (15.3)'$$

この法則がLorentz変換に対して不変であるためには両辺とも反変ベクトルである必要がある。
この条件で $F^{\mu}{}'$ がベクトルであることがわかったのでLorentz変換S'→Sを(15.3)'に適用すると

$$m\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = F^{\mu} \qquad (15.4)$$

S系から見た力学の基礎方程式

さらに、この変換を $x^{\mu} = b^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu}{}'$ とするとF^μは

$$F^{\mu} = b^{\mu}{}_{\nu} F^{\nu}{}' = \sum_{k=1}^{3} b^{\mu}{}_{k} F^{k}{}' \qquad (15.5)$$

(15.4)で $dx^k / d\tau = 0$ となる必要はないので結局(15.4)は最初の前提の瞬間だけでなく常にこの方程式が成り立つ。この相対論的な力 F^{μ} は4元力(4-force)という

次に、この4元力の実例を示す

今、電荷e,質量mの陽子が真空中で、与えられた電磁場 $f_{\mu\nu}$ の作用を受けて、運動をしているとき、この陽子の運動方程式、これに働く4元力を求めてみる。

上の処法から

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu \qquad F^\mu = \sum_{i=1}^{3} b^\mu{}_i \underline{F^i{}'}$$

静止系S'から見た力

$f_{\mu\nu}$ を使って表す

$$F^\mu = \sum_{i=1}^{3} ceb^\mu{}_i a^i{}_\sigma a^0{}_\rho f^{\rho\sigma}(x)$$

$$\left(\quad F^i{}' = eE_i{}' = cef^{0i}{}' = cea^0{}_\rho a^i{}_\sigma f^{\rho\sigma}(x) \quad \right)$$

ここで、13節で用いた計算の技巧(?)を使って右辺を書き換える

$F^\mu = cea^0{}_\rho f^{\rho\mu}$ となり、(14.3)の $a^0{}_\rho = b_\rho{}^0 = -\dfrac{u_\rho}{c}$ の関係を使えば

$$F^\mu = ef^{\mu\rho}u_\rho \qquad (15.7)$$

$f^{\mu\rho} = -f^{\rho\mu}$ から $\boxed{F^\mu u_\mu \equiv 0}$

これは4元力がどのようなものであろうと
満足しなくてはいけない条件(理由は割愛)

$$F^{\mu}=ef^{\mu\rho}u_{\rho} \qquad (15.7)$$ を3次元ベクトルで書くと、

$$\vec{F}=(F^1,F^2,F^3)=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\vec{K} \qquad (15.8)$$

ここで、KはSから見たLorentz力で $\vec{K}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

である。また、先の4元力の条件 $F^{\mu}u_{\mu}\equiv 0$ を恒等式とすると、

$$cF^0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=(\vec{v}\cdot\vec{K}) \qquad (15.9)$$

となり、この左辺は単位時間中に電磁場が陽子に与える仕事である。

エネルギー及び運動量

Newton力学にまねて $m\dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=F^\mu$ (15.4)を書き換えると、

$$\frac{d}{d\tau}P^\mu = F^\mu \quad (16.1)$$

となり、この P^μ を**4元運動量(4-momentum)**と呼び、次のように定義する

$$P^\mu \equiv mu^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (16.2)$$

FとLorentz力の関係

$\vec{P}=(P^1,P^2,P^3)$

ここで、この4元運動量の意味を調べる(時間と空間に分ける)ために、3次元運動量を持ってくると

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}\sqrt{1-(v/c)^2}=\vec{K} \qquad \left(\vec{F}=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\vec{K}\right) (15.8)$$

となり、これはNewton力学の意味における力と考えられる。したがって

(16.1)の

- **空間成分**は $\dfrac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}$ (16.1)' となり、左辺のPは**質点の運動量**を表す
- **時間成分**は $\dfrac{d}{dt}(cP^0)=cF^0\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}=(\vec{K}\cdot\vec{v})$ (16.1)'' となり、**単位時間中に外力Kが質点に与える仕事**を表す

さらに、(16.1)の時間成分から

$$\frac{d}{dt}(cP^0) = cF^0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = (\vec{K}\cdot\vec{v})$$

オフセットみたいなもん？

$$cP^0 = (\text{質点のもつエネルギー}) + const.$$

普通エネルギーを定義するとき、その原点は任意だけどEinsteinは上をconst=0とした。
その結果、(エネルギー/c)と運動量が一組になって4元ベクトル P^μ にまとめられた。

あとで重要な結果を引き出す

以上を4元運動量の定義に基づいて整理すると

$$\begin{cases} \vec{P} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \text{質点の運動量} \\[2ex] cP^0 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = W = \text{質点のエネルギー} \end{cases} \qquad (16.2)'$$

静止している物体でもmc^2のエネルギーをもっている

これで、特に、v=0の時、P=0だが、エネルギーWは mc^2 になる。これを質量mの質点の静止エネルギー(rest energy)という。

これを言い換えると質点は必ず W/c^2 という静止質量をもつということにもなる。

Einsteinの主張が正しいことを示す実験例を示す前に P^μ についてもうちょっと詳しく

まず、恒等式　$u_\mu u^\mu = -c^2$　(16.5)

から　$P_\mu P^\mu = -(mc)^2$　(16.6)　が成り立つ。

これを質量の定義式とし、エネルギーWと運動量Pの関係を導く

$$W = c\sqrt{(\vec{P})^2 + (mc)^2} \qquad (16.6)'$$

・・・は(P/mc)^2の
3乗以降なので無視

ここで、非相対論的な場合(v<<c)、(16.2)'からP～mv(<<mc)となり、上式は

$$W = mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{P})^2 + \cdots$$

$(\vec{P})^2/2m \quad (= mv^2/2)$

となり、これはつまり　$W(Einstein) = \underline{mc^2} + \underline{W(Newton)}$

これが意味するところは従来のNewtonのエネルギーの定義に mc^2 を足したということ

次に、Einsteinの主張を支持する事実について述べる

物質に高エネルギーのγ線を当てると、物質中の原子核の近くで、γの持っていたエネルギーは陽電子e(+)と電子e(-)の一対をつくる。これはすなわち

$$\gamma = \underline{e^{+} + e^{-}}$$

$\geq 2mc^2$ のはず！つまり

γもこれより大きいはず！

したがって、γのエネルギーが $2mc^2$ より大きい時に上の現象は起きるはず。
実験によると確かにγのエネルギーが $2mc^2$ を越した点で初めて、一対の $e^{+}+e^{-}$ の発生が観測された。

このようにEinsteinの定義の正当性が保証された現在では、逆にこれを利用して未知の粒子の質量の決定が行われていて、素粒子物理学では常識になっている。

問題1

1gの物質がすべてエネルギーに変わったとき、そのエネルギーを計算せよ。
そして、これがどれほど莫大なエネルギーであるかを実感するために求めたエネルギーを作りだすために30万kWの発電所でどのくらいの時間掛かるかも計算せよ。

答

まず、エネルギーはE=mc^2より　9×10^13[J]
次にかかる時間は

$$30万kW = 3\times10^{8}W$$

$$\frac{9\times10^{13}J}{3\times10^{8}W} = 3\times10^{5}s \approx 3.5days$$

問題2

太陽が一年間で損失している質量の割合を求めよ。

パラメタ

毎秒地球表面に降り注ぐ太陽エネルギー：1340[W/m^2]

太陽-地球間平均距離：1.50×10^11[m]

太陽質量：2.0×10^30[kg]

答

太陽$-$地球間距離を半径とする球の表面積は$4\pi \times (1.50\times 10^{11})^2 [m^2]$

したがって、太陽から放射される毎秒の全エネルギーは

$$\frac{dE}{dt} = 1340[W/m^2]\times 4\pi \times (1.50\times 10^{11})^2[m^2] = 3.79\times 10^{26}[W]$$

これを質量損失に換算すると

$$\text{質量損失}/s = \frac{dM}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{3.79\times 10^{26}[J/s]}{(3.0\times 10^8[m/s])^2} = 4.21\times 10^9[kg/s] = 421\text{万トン}/s$$

よって、１年で輻射の形で消失する質量の割合は

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{(4.21\times 10^9[kg/s])(3.15\times 10^7[s/y])}{2.0\times 10^{30}[kg]} = 6.7\times 10^{-14}/y$$

したがって質量損失量を見て一瞬「太陽すぐ消えんじゃね！？」焦るが、ソーラーマスとの割合をみるとものすごい莫大な時間がかかることがわかる。