相対論ゼミ第二回
第2章テンソル算(P36~52)

５．一般のLorentz変換
6. Minkowski空間、虚時間
7.スカラー、ベクトル、テンソル

5.一般のLorentz変換

この前やったやつ

(3.6)
$$t' = \frac{t - (\upsilon / c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, y' = y, z' = z$$

⇒特殊Lorentz変換

もっと一般化したい！！

5.一般のLorentz変換

・S系から見た世界点Pで起きたイベントの直交座標

$$x^\mu (\mu = 0,1,2,3)$$

べき乗じゃない！！

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

S′系から見ると

$$x^\mu{}' = (x^0{}', x^1{}', x^2{}', x^3{}')$$

二つの条件
- 相対性原理
- x^μが有限なら$x^\mu{}'$も有限

（5.1）　$$x^\mu{}' = \sum_{\upsilon=0}^{3} a^\mu{}_\upsilon x^\upsilon + b^\mu$$

$a^\mu{}_\upsilon$: 4×4のxと無関係な未定係数、$b^\mu = 4$個の定数

（5.1）′　$$x^\mu{}' = a^\mu{}_\upsilon x^\upsilon$$

- $x^\mu = 0 \longrightarrow S'$から見た$S$の原点
- $b^\mu = 0 \longrightarrow S' = S$

これだけではまだLorentz変換とは言えない！！

5.一般のLorentz変換

なので光速不変の原理をプラス

その条件は

$$-(x^0)^2+\sum_{k=1}^{3}(x^k)^2=-(x^0{}')^2+\sum_{k=1}^{3}(x^k{}')^2$$

さらに

$$\eta_{\mu\upsilon}=\eta_{\upsilon\mu}=\begin{cases}1 & (\mu=\upsilon=1,2,3)\\ 0 & (\mu\neq\upsilon)\\ -1 & (\mu=\upsilon=0)\end{cases}$$

という記号を使って

$$\eta_{\mu\upsilon}x^\mu x^\upsilon=\eta_{\mu\upsilon}x^\mu{}'x^\upsilon{}' \qquad (5.2)'$$

$S^2=0$という条件なしでもおｋ！

したがって、Lorentz変換は次のように定義できる。

任意の世界点PのS,S'からみた座標をそれぞれ$x^\mu,x^\mu{}'$とする。今、x^μと$x^\mu{}'$の間の関係(5.1)'がさらに(5.2)'を満たすとき、変換$x^\mu\Rightarrow x^\mu{}'$は$Lorentz$変換である。

そして、(5.2)′の右辺に(5.1)′を代入して、xの係数比較をすると

$$\eta_{\mu\upsilon}=\eta_{\rho\sigma}a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\upsilon \qquad (5.3)$$

となり、次のように言い換えられる

(5.1)'で定義された座標変換においてその係数$a^\mu{}_\upsilon$が(5.3)を満たすときは、それは$Lorentz$変換である。

(5.1)′の代わりに(5.1)についてもその係数aが(5.3)を満足するとき
それは非斉次Lorentz変換とよぶ。

5.一般のLorentz変換

ここで、条件(5.3)は二つの添字について対称であるから係数a(μ,v)に10個の制限を付けている。したがって、(5.1)’の変換では16個の係数を任意に選んでるように見えるが、(5.3)の条件のために16-10=6個になる。これはSに対するS’の選択の自由度に対応している。

つまり、6個の自由度の数を決定すればS’系の運動とその方向が決定できる。

以上からLorentz変換は無数に多くのものがありそれは全体で∞^6通りあり、Lorentz変換全体は実は数学でいう群をなす。つまり、6個の連続的自由度をもつ連続群である。
これの単位元に相当するものはa(μ,v)をデルタ関数でおいた変換、すなわち恒等変換

$$x^{\mu} \Rightarrow x^{\mu}{}' = x^{\mu}$$

である。

Lorentz変換(5.1)’の逆変換もまたLorentz変換である。なぜなら、条件(5.3)から、(5.1)’をx^vについて解くと

$$x^{\upsilon} = b^{\upsilon}{}_{\mu} x^{\mu}{}' \qquad (5.1)''$$

これは(5.1)’を書き換えたものなので、当然(5.2)’を満足する。

したがって、(5.1)”で定義された変換x^μ’→x^μもLorentz変換である。

この群をLorentz群といい、さらに一般化した(5.1)のタイプの変換全体もまた群をなし、これは非斉次Lorentz群とかPoincare群と呼ばれる。

5. 一般のLorentz変換

これは今までのLorentz群と座標系の原点を移動させる変換、つまり、

$$x^{\mu} \to x^{\mu}{}' = x^{\mu} + b^{\mu}$$

とを一緒にしたもので、後者は、bの4個のパラメタに依存するのでPoincare群は計10個のパラメタに依存する。

ここで、逆変換(5.1)″の係数bと、もとのLorentz変換の係数aを求めてみる。

まず、aを要素とする4×4行列Aを考える。

$$(\mathrm{A})_{\mu\upsilon} \equiv a^{\mu}{}_{\upsilon}$$

同様に

$$(\mathrm{Y})_{\mu\upsilon} = \eta_{\mu\upsilon}$$

と定義すると、(5.3)をマトリクス記号を用いて

$$\eta_{\mu\upsilon} = \eta_{\rho\sigma} a^{\rho}{}_{\mu} a^{\sigma}{}_{\upsilon}$$

$$(\mathrm{Y})_{\mu\upsilon} = (A^{T} YA)_{\mu\upsilon} \qquad (5.4)$$

ここで両辺の行列式を求めると

$$\det(\mathrm{Y}) = \det(A^{T} YA) = \det(A^{T})\det(Y)\det(A)$$

5.一般のLorentz変換

ここで、

$$\det(A^T) = \det(A), \det(Y) = -1$$

なので

$$\det(A) = \pm 1$$

したがって、(5.1)′をx^μについて解くと、

定義は同じだけど別モノ

$$(Y^{-1})_{\mu\upsilon} = \begin{cases} 1 & (\mu = \upsilon = 1) \\ 0 & (\mu \neq \upsilon) \\ -1 & (\mu = \upsilon = 0) \end{cases} \qquad (\equiv \eta^{\mu\upsilon})$$

ここで新しい記号$\eta^{\mu\upsilon}(\equiv \eta_{\mu\upsilon})$を導入する。

そして、 $(Y^{-1})_{\mu\upsilon} \equiv \eta^{\mu\upsilon}$ と、定義すると(5.4)から

$$1 = Y^{-1} A^T Y A$$

添字の位置に注意

すなわち、

$$\delta^{\mu}{}_{\upsilon} = \eta^{\mu\upsilon} a^{\rho}{}_{\lambda} \eta_{\rho\sigma} a^{\sigma}{}_{\upsilon} \qquad (5.7)$$

一方、(5.1)″の右辺に(5.1)′を代入すると

$\delta^{\mu}{}_{\upsilon} = b^{\mu}{}_{\sigma} a^{\sigma}{}_{\upsilon}$ で、(5.7)と係数比較すると

$$b^{\mu}{}_{\sigma} = \eta^{\mu\lambda} a^{\rho}{}_{\lambda} \eta_{\rho\sigma} \Rightarrow \eta_{\sigma\rho} a^{\rho}{}_{\lambda} \eta^{\lambda\mu} \equiv a_{\sigma}{}^{\mu}$$

5. 一般のLorentz変換

つまり、$a_\sigma{}^\mu$の σ はもとの、$a^\rho{}_\lambda$の ρ を$\eta_{\sigma\rho}$によって引きずりおろされ、

また$a_\rho{}^\mu$の μ はもとの$a^\rho{}_\lambda$の λ を$\eta^{\lambda\mu}$によって引っ張りあげられた。$\eta_{\mu\upsilon}$と、$\eta^{\mu\upsilon}$の定義を思い出すと、

μ、vがどちらも1,2,3のいずれかの場合、及び、μ=v=0の時、

$$a^\mu{}_\upsilon = a_\mu{}^\upsilon$$

vが0の時は、

$$a^k{}_0 = -a_k{}^0, a^0{}_k = -a_0{}^k \qquad (k=1,2,3)$$

この新しい手法を用いると、(5.1)′の逆変換(5.1)′′は

$$x^\upsilon = a_\mu{}^\upsilon x^\mu{}' \qquad (5.1)'''$$

(5.3)にそっくり！？

と表され、これを(5.1)′の右辺に代入してx^ρ′の係数を比べると

$$\delta^\mu{}_\rho = a^\mu{}_\upsilon a_\rho{}^\upsilon = a^\mu{}_\upsilon \eta_{\rho\lambda} a^\lambda{}_\sigma \eta^{\sigma\upsilon}$$

両辺に$\eta^{\tau\rho}$をかけると $\eta^{\mu\tau} = a^\mu{}_\upsilon a^\tau{}_\sigma \eta^{\sigma\upsilon}$ となる。

最後に(5.3)から導ける式をもういっこ！

5. 一般のLorentz変換

(5.3)でμ=ν=0とくと、

$$a^0{}_0 = \pm\sqrt{1+\sum_{k=1}^{3}(a^k{}_0)^2}$$

したがって$a^0{}_0$は≥ 0か≤ -1である。そこで$Lorentz$変換は$\det(A)=\pm 1$、及び$a^0{}_0 \geq +1$か≤ -1の４組に分けられる。

恒等変換や、(3.6)に与えれた特殊$Lorentz$変換は$\det(A)=1$で$a^0{}_0 \geq +1$の組に入る。

$\det(A)=+1$で$a^0{}_0 \geq 1$の変換を本義$Lorentz$変換($Proper Lorentz Transformation$)と呼ばれる。

次の問を解いてみよ！！

問1

ガレリイ変換$x'=x=Vt, y=y', z'=z, t'=t$を行列で表現し、
異なる速度Vで特徴づけられる元の行列としての
掛算を実行して、それらが群をなすことを確かめろ！！

解

x,tについての変換の行列表示をすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

この形の行列の積を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -V_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -V_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(V_1 + V_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、可換群をなすことがわかる。

問2

下の証明の誤りを見つけよ！！

・・・要約すると、こういうことになる。ニュートンの運動方程式はガリレイ変換で不変になるが、光の速さとか光の伝播の式は不変にならない。光は電磁気現象であるから、マクスウェルの方程式で記述される。つまり、マクスウェルの方程式とか波動方程式はガリレイ変換で不変にならないのである。このことをはっきりと示そう。

電磁気学の基礎方程式であるマクスウェルの方程式を変形すると、光を含む電磁波の伝播を記述する波動方程式が与えられる。その方程式を1次元の場合に書くと、y方向の電場をExとして、

$$\partial^2 E_y/\partial t^2 = c^2(\partial^2 E_y/\partial x^2) \quad (3.19)$$

である。ガリレイ変換は、

$$x' = x - vt$$
$$t' = t$$

であるので、演算子は、

$$\partial/\partial x = \partial/\partial x' \quad (3.20)$$
$$\partial/\partial t = (\partial t'/\partial t)(\partial/\partial t') + (\partial x'/\partial t)(\partial/\partial x') \quad (3.21)$$

となる。これらの演算子を自乗して、方程式(3.19)に代入すると、

$$\partial^2 E'_y/\partial t'^2 = (c^2 - v^2)(\partial^2 E'_y/\partial x'^2) + 2v(\partial^2 E'_y/\partial x'\partial t') \quad (3.22)$$

というよう変な形をした、変換された方程式が得られる。これは元の波動方程式とは形が異なる。つまり波動方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。波動方程式がローレンツ不変であることは同様な計算から示される。しかし、ニュートンの運動方程式はローレンツ変換に対して不変にはならない。・・・・・・

解

電磁波の伝播を記述する波動方程式(3．19)が、ガリレイ変換不変ではなく、ローレンツ変換ではじめて不変となる、となっている。

この説明からは、マクスウェル方程式の不変性までもが証明されたかの印象を受けるが、それは全く違う。

じつは、波動方程式が不変であるからと言って、マクスウェル方程式そのものがローレンツ変換不変であるとは結論できない。

つまり、マクスウェル方程式のローレンツ変換不変性を示すには、波動方程式の不変性を示すだけでは不十分で、電場と磁場の変換式を精密に導いて証明しなければならない性質のものだからである。

ローレンツ変換

$$x' = (x - \beta ct)/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = (ct - \beta x)/\sqrt{1-\beta^2}$$

(β:速度の光速との比)