



弱い重力場、重力波！

2010/12/02 相対論ゼミ

鈴木

弱い重力場

重力場の源から十分に離れた地点では、重力波非常に弱い。

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa} \varphi_{\mu\nu}(x), \quad |\sqrt{\kappa} \varphi_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (32.1)$$

$g_{\mu\nu}$ を(32.1)のようにあらわすことができる場合、この重力場を**弱い重力場**という。
この場合には $g_{\mu\nu}$ は近似的に

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - \sqrt{\kappa} \varphi^{\mu\nu}, \quad \varphi^{\mu\nu} \stackrel{d}{=} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \varphi_{\rho\sigma} \quad (32.2)$$

この節では時空は平坦なMinkowski空間と考え、 $\varphi_{\mu\nu}(x)$ であらわされる重力場が
その中を伝播するイメージを採用する。

→重力場 $\varphi_{\mu\nu}$ は特殊相対論における電磁場と同じか使いを受ける。

→添え字の上げ下ろしは $\eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$ により行われる。

弱い重力場

Einsteinの方程式 $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}$ は、 φ の1次近似は、

$$\square \stackrel{d}{=} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad \varphi \stackrel{d}{=} \eta^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} = \varphi^\nu{}_\nu, \quad \varphi^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} \stackrel{d}{=} \frac{\partial \varphi^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad \text{を用いて、}$$

$$\varphi_{,\mu\nu} + \square \varphi_{\mu\nu} - \varphi^\alpha{}_{\mu,\nu\alpha} - \varphi^\alpha{}_{\nu,\mu\alpha} - \eta_{\mu\nu} \square \varphi + \eta_{\mu\nu} \varphi^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} = 2\sqrt{\kappa} T_{\mu\nu} \quad (32.3)$$

と書ける。今、 $\varphi_{\mu\nu}$ のかわりに、

$$\psi_{\mu\nu} \stackrel{d}{=} \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi \quad (32.4)$$

を用い、さらにLorentz条件にまねて、

$$\psi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (32.5)$$

という条件をつけると(32.3)は

$$\square \psi_{\mu\nu} = 2\sqrt{\kappa} T_{\mu\nu} \quad (32.6)$$

となる。右辺の $T_{\mu\nu}$ はもともとは $g_{\mu\nu}$ もふくんでいたが、(32.1)を使えば、(32.6)の右辺の $\varphi_{\mu\nu}$ に関する項はすべて $\sqrt{\kappa}$ の2次以上となる。

→これから $T_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ に無関係。つまり特殊相対論における物質系のエネルギーテンソルを用いればよい。

弱い重力場

したがって物質系に対する基礎方程式から

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (32.7)$$

(32.6)(32.7)をあわせ考えると、条件(32.5)が重力場の方程式(32.6)と両立しうることがわかる。条件(32.5)は**De Donderの条件**

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0 \quad (32.5)'$$

を $\sqrt{\kappa}$ の1次の近似で表したものである。(32.5)'は**調和条件**とも呼ばれる。

重力波

(32.5)、(32.6)、(32.7)は特殊相対論における電磁場の方程式

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (11.5)$$

$$\square A^\lambda = -\mu_0 j^\lambda, \quad (11.4)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (11.2)$$

と全く同じ形である。唯一の違いは電磁場がベクトルであるのに対し、重力場は2階のテンソルであるということである。電磁場では、さらにゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (11.6)$$

に対して方程式が不変という特徴がある。重力場でこれに対応するのは、次のような無限小座標変換である。今、任意のアフィンベクトル $\lambda^\mu(x)$ を用いて

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \sqrt{\kappa} \lambda^\mu(x) \quad (32.8)$$

という座標変換を考える。(32.8)に応じて $g_{\mu\nu}$ は、

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') &= g_{\mu\nu}(x) + \sqrt{\kappa} (\partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu) \\ &\stackrel{a}{\equiv} \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\kappa} \varphi'_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (32.9)$$

のように変換される。

重力波

あるいは、 $\varphi_{\mu\nu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu\nu}(x) = \varphi_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \lambda_\nu + \partial_\nu \lambda_\mu$. (32.9)'

ここで、 $\lambda_\nu \stackrel{d}{=} \eta_{\nu\mu} \lambda^\mu$ である。(32.9)' が (11.6) に対応する。

$\phi^{\mu\nu}$ に対しても条件(32.5)が成立するためには任意関数 λ^μ に

$$\square \lambda^\mu = 0 \quad (32.10)$$

という制限をつければよい。ここで特に $T_{\mu\nu}=0$ の場合を考えてみよう。

この場合には、重力場の方程式は

$$\square \phi_{\mu\nu} = 0 \quad (32.6)'$$

となる。これを縮約すれば $\square \phi = 0$ となるから、 $\phi^{\mu\nu}$ に対して(32.5)のほかに更に

$$\phi \stackrel{d}{=} \eta^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} = 0 \quad (32.11)$$

という条件をつける。

(32.4)の定義をみると、条件(32.11)のおかげで $\phi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu}$ となる。

なお、(32.11)が変換(32.9)'に対して不変であるためには λ^μ に対してさらに

$$\lambda^\mu_{,\mu} = 0 \quad (32.12)$$

という条件をつける必要がある。

重力波

これから、

$$\square \varphi^{\mu\nu} = 0, \quad \varphi^{\mu\nu}_{,\mu} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (32.13)$$

の解を求める。この一般解は次のような平面波解の重ね合わせで表される。
いま、解を次のようにおく。

$$\varphi^{\mu\nu}(x) = a^{\mu\nu} e^{ikx}, \quad kx \stackrel{d}{=} k_\mu x^\mu.$$

これが(32.13)の第1,2,3式を満足するためには次の条件が必要である。

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad k_\mu a^{\mu\nu} = 0, \quad \eta_{\mu\nu} a^{\mu\nu} = 0. \quad (32.14)$$

また座標変換(32.8)に対して任意関数 $\lambda^\mu(x)$ は

$$\square \lambda^\mu = 0, \quad \lambda^\mu_{,\mu} = 0$$

を満足する必要がある。この平面波解として

$$\lambda^\mu(x) = c^\mu e^{ikx} \quad \text{但し} \quad k_\mu c^\mu = 0 \quad (32.15)$$

がある。ここで k_μ として(32.14)の k_μ と同じものをとれば、変形(32.8)、(32.9)' に対して、振幅 $a_{\mu\nu}$ は

$$a_{\mu\nu} \rightarrow a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} + i(k_\mu c_\nu + k_\nu c_\mu) \quad (32.16)$$

のように変換される。

重力波

簡単のために、 $k_0 = -k$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k$ となるように座標系を選べば、(32.14)から $a_{\mu\nu}$ の独立なものは a_{00} , a_{01} , a_{02} , $a_{11}(= -a_{22})$, a_{12} の5個となる。これ以外のものは、 $a^{0\nu} = a^{3\nu}$ を使って上の5個のうちのどれかで表される。また c^μ は(32.15)により $c^0(=c^3)$, c^1 , c^2 が独立な量である。変換(32.16)にたいしては、 $a_{11}(= -a_{22})$, a_{12} は不変。またその他の成分は

$$a'_{00} = a_{00} - 2ikc_0, \quad a'_{0j} = a_{0j} - ikc_j \quad (j=1, 2)$$

となる。そこで c_μ を

$$c_0 = \frac{-i}{2k}a_{00}, \quad c_j = \frac{-i}{k}a_{0j} \quad (j=1, 2)$$

のようにとれば、変換後の波の振幅は

$$a'_{11} = a_{11}(= -a'_{22}), \quad a'_{12} = a_{12} \quad (32.17)$$

だけが0なく、他のすべては0となる。

重力波

このように(23.13)の解である**重力波(gravitational wave)**は見かけ上は10個の成分を持つが、座標系を適当に取れば、0でない成分はわずかに2個となる。

しかもそれらの振幅は、その添え字が示すように (x^1, x^2) 平面内にあり、波の進行方向に直角である。つまり重力波は、電磁波と同じように横波で、2個の異なる状態があり、それらは電磁波と同様に、たとえば右巻き、および左巻き変更に対応する。

今 $x^{3'}$ 軸を軸として、 x' 座標軸をその向きに θ だけ回転させたとする。これに応じて、任意の点の座標 x^1, x^2, x^3 は、

$$x^1 \rightarrow \bar{x}^1 = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta$$

$$x^2 \rightarrow \bar{x}^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta$$

$$x^3 \rightarrow \bar{x}^3 = x^3$$

のように変換される。あるいは $x^1 + ix^2 = \zeta$ とおけば、 $\zeta \rightarrow \bar{\zeta} = e^{i\theta} \zeta$ となる。

重力波

(32.17)を振幅とする波から、2つの独立な波

$$\varphi_+(x) = (a^{11} + ia^{12})e^{ikx}, \quad \varphi_-(x) = (a^{11} - ia^{12})e^{ikx}$$

を作れば、これらは上記の座標回転に対して

$$\varphi_+ \rightarrow \bar{\varphi}_+ = e^{2i\theta}\varphi_+, \quad \varphi_- \rightarrow \bar{\varphi}_- = e^{-2i\theta}\varphi_-.$$

これらは、上述の2つの偏光状態に対応する波である。回転角 θ に対して、重力波の振幅が $\exp\{\pm i2\theta\}$ 倍されるのは、それが2階のテンソルであるからである。

φ の2次までの近似で重力波のエネルギー擬テンソルを計算すれば、上述の2つの独立成分のみがエネルギーの流れの式の中に顔をだす。

→他の成分は全く見かけだけのもので、物理的意味を持たない。

重力波

$T^{\mu\nu} \neq 0$ のときは、 $T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$ となる場合を除いては、条件(32.11)は使えない。したがって $\phi_{\mu\nu}$ と $\varphi_{\mu\nu}$ とは等しくない。

この場合にも、電磁場の例にならって(32.6)の解 $\phi_{\mu\nu}$ を遅延ポテンシャルの形にとくことができる。

$$\phi_{\mu\nu}(\vec{x}, x^0) = -\frac{1}{4\pi} 2\sqrt{\kappa} \int \frac{T_{\mu\nu}\{\vec{x}', x^{0'} = x^0 - |\vec{x} - \vec{x}'|\}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

特に $T_{\mu\nu}$ の0でない領域が空間内の或る1点の近くに限局されている場合には^(32.18)
(32.18)に右辺は近似的に見透しのよい形に書き換えられる。結果は

$$\begin{aligned} \phi^{ik}(x) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{4\pi r} \ddot{Q}^{ik}(t') + \dots, \\ \phi^{0k}(x) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r} \left\{ c \dot{D}^k(t') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r} x^i \ddot{Q}^{ik}(t') + \dots \right\}, \\ \phi^{00}(x) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi r} \left\{ c^2 M(t') + c \sum_{i=1}^3 \frac{x^i}{r} \dot{D}^i(t') + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{x^i x^k}{r^2} \ddot{Q}^{ik}(t') + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (32.19)$$

重力波

さらに物質の質量密度を $\rho(\vec{x}', t')$ とすると

$$M(t') = \int \rho(\vec{x}', t') d^3x' = \text{時刻 } t' \text{ における物質の全質量}$$

$$D^k(t') = \int x^{k'} \rho(\vec{x}', t') d^3x' = \text{質量の双極子能率}$$

$$Q^{ik}(t') = \int x^{i'} x^{k'} \rho(\vec{x}', t') d^3x' = \text{質量の 4 極能率} \quad \text{である。}$$

いま(31.2)を ψ の2次までの近似で書き、これに(32.19)を使えば、重力波により持ち去られるエネルギーの割合を計算できる。たとえば x^3 軸上で、原点から十分はなれた所にある、 x^3 軸に直角な単位面積を単位時間中に外に向かって通過するエネルギーは

$$ct^3_0 = \frac{2\kappa}{(8\pi)^2 cr^2} \left\{ \frac{(\ddot{Q}^{11} - \ddot{Q}^{22})^2}{4} + (\ddot{Q}^{12})^2 \right\}$$

となる。これをみると、重力波を放出する源の物質の質量の**4極能率**だけが重力波の放出にとって重要であり、Newtonポテンシャルや**双極子能率**は役だたないことがわかる。

おまけ

一般相対論がニュートン理論と決定的に違うひとつの側面は、重力波が存在することである。ニュートン理論では物質が重力の源なので、まったく物質が存在しなければ重力も存在しない。ところが一般相対論では物質がなくても時空は曲がることができ、さらにその曲がり振動として光の速度で伝わるすることができる。これはちょうどマクスウェルの理論によって電磁波が予言されたのと似ている。マクスウェル以前は、電荷がないところには電磁場は存在しないと考えられていた。マクスウェルによって、電磁場は電荷の束縛から解放され、電磁波として伝わるようになった。

重力波の発生メカニズムは、質量の加速度運動である。したがって腕を振り回しても重力波は出る。ただし、実際に計算してみると、たとえば100メートル1000トンの棒を一秒間に10回振り回しても、重力波の運ぶエネルギーはたかだか 10^{-20} ワットにしか過ぎず、100億年かかっても1gの水の温度を1/1000度くらいしか上げられない。

では、なぜ重力波を観測する必要があるのか？それは重力波はいったん放出されると、他の物質とほぼ相互作用をしないということに尽きる。これは、重力波を放出した天体の情報をそのまま観測できるということになる。

おまk

天体から重力波を観測しようとする試みは、かなり前から行われている。
メリーランド大学のウェーバーは巨大なアルミの円筒をワイヤーで吊るした装置を作って1965年ころから重力波の観測を始めた。ウェーバーは、重力波が通過するとアルミの円筒が振動することを利用して、その振動を検出しようとしたのである。しかし、重力波による信号は、とても微弱なので、地面振動や熱振動、その他多くの雑音に邪魔され、観測ができなかった。そこでウェーバーは同じ装置を1000km離して設置し、二つの装置が同時に信号を検出した場合のみ、それが重力波によるものとした。

そして1986年から1970年前半にかけて、銀河系の中心からやってきたと思われる多くの重力波を検出したと発表して、学会にセンセーションを巻き起こした。その後同じような装置でいくつかのグループがウェーバーの実験を追試したが、どのグループも検出に成功しなかった。現在では、残念ながらウェーバーの観測は間違いだったとされている。

現在の観測装置は…。以下略。

もんだい。

重力波には h_+ モードと $h_\times$ モードがある。
真空中を z 方向に伝わる重力波は以下の式で表される。

$$h_+ = A_+ \cos\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z)\right)$$

$$h_\times = A_\times \cos\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (ct - z)\right)$$

長さ L_0 の棒を z 方向に沿って置いた場合、 x 方向に沿っておいた場合、
それぞれの場合で棒の長さはどのように変化するでしょーか？