

相対論 14回目

重力場内のMaxwell方程式

2010年11月11日 (ポッキープリッツの日)

@鈴木

重力場内のMaxwell方程式

この章では、重力場内のMaxwell方程式を求める。
ある瞬間、質点の存在する点で測地的な座標系(局所Lorentz系)を基準とした、Maxwell方程式は、

$$\partial_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \quad (12.1)$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \quad (12.2)$$

で与えられる。

これを一般座標変換すれば、求める結果が導かれる。

ここで、電磁場の強さを表す量は反対称テンソル $f_{\mu\nu}(x)$

また、4元電流は $j^\mu(x)$ である。

特殊相対論→一般相対論

次のような操作を行えば、特殊相対論における物理法則が、一般相対論に変換できる。

$$\begin{array}{ccc} \text{特殊相対論} & & \text{一般相対論} \\ \eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu} & \longrightarrow & g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}, \\ \partial/\partial x^\mu & \longrightarrow & \nabla_\mu. \end{array} \quad (27.4)$$

これを用いると、12章で学んだ特殊相対論のMaxwell方程式が

$$\partial_\lambda j^\lambda = 0 \qquad \nabla_\mu j^\mu = 0 \qquad (27.1)$$

$$\partial_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \qquad \nabla_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \qquad (27.2)$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \qquad \nabla_\lambda f_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_{\nu\lambda} + \nabla_\nu f_{\lambda\mu} = 0, \quad (27.3)$$

と書き換えられる。

等価原理不成立の例(1)

ここで、(27.1)～(27.3)を書き換えて、等価原理の成立しない例を示してみる。

(27.1)、(27.2)に $\sqrt{-g}$ をかけると、テンソル密度の共変微分に対する定義

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) &\stackrel{d}{=} \sqrt{-g}\nabla_\lambda T^{\mu\nu} \\ &= \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\rho} T^{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\rho\lambda} T^{\mu\nu}\end{aligned}$$

から、 $\partial_\mu \mathbf{j}^\mu = 0,$ $\mathbf{j}^\mu \stackrel{d}{=} \sqrt{-g}j^\mu$ (27.1)'

$\partial_\nu \mathbf{f}^{\lambda\nu} = \mu_0 \mathbf{j}^\lambda,$ $\mathbf{f}^{\lambda\nu} \stackrel{d}{=} \sqrt{-g}f^{\lambda\nu}.$ (27.2)' となる。

(27.3)は特殊相対論における方程式と形が変わらないので、ポテンシャル A_μ を用いて、

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (27.5)$$

と書ける。

等価原理不成立の例(3)

$$\square A^\lambda + R^\lambda{}_\rho A^\rho = -\mu_0 j^\lambda \quad (27.7)$$

重力場が存在し、時空がゆがんでおり、曲率テンソルが0でない場合には、たとえ局所的に測地系を設けて、ある世界点の近傍で $\Gamma=0$ となるようにしても、(27.7)の左辺第2項は0とはならない。



等価原理の不成立

一般にある物理現象が重力そのものだけに関係しておい、その勾配には無関係ならばこれに対して等価原理は成立する。

しかし重力の勾配が問題になる現象では、等価原理は成立しない。

重力場が電磁場とだけ相互さようしており、他に物質が存在しない場合には、

$R^\lambda{}_\rho$ は実は電磁場のエネルギー運動量テンソル比例する。

つまり電磁場の線形製も失われる((28.7)を参照)

等価原理不成立の例(2)

ここで、(27.2)を A_μ を使って書き換える。まず A_μ に対してLorentz条件

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \quad (27.6)$$

を付け加える。(27.2)のサ変に(27.5)をだいにゆうして(27.6)を使うと

$$\begin{aligned} \nabla_\nu (\nabla^\lambda A^\nu - \nabla^\nu A^\lambda) &= (\nabla_\nu \nabla^\lambda - \nabla^\lambda \nabla_\nu) A^\nu - \square A^\lambda, \\ (\square A^\lambda &\stackrel{d}{=} \nabla_\mu \nabla^\mu A^\lambda). \end{aligned}$$

上の第一項は

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha \stackrel{d}{=} \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (25.1)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\stackrel{d}{=} R^\alpha_{\nu\mu\alpha} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\tau} \Gamma^\tau_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\nu\tau} \Gamma^\tau_{\mu\alpha} \\ &= R_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (25.9)$$

を使うと $g^{\lambda\mu} (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) A^\nu = g^{\lambda\mu} R^\nu_{\rho\nu\mu} A^\rho = -R^\lambda_\rho A^\rho$ となる。したがって(27.2)は

$$\square A^\lambda + R^\lambda_\rho A^\rho = -\mu_0 j^\lambda \quad (27.7)$$

電磁場の方程式

(27.2)'もHamiltonの原理から導くことが出来る。

ここでは特に与えられた重力場の中でN個の荷電粒子が電磁場と相互作用している場合の電磁場の方程式、および粒子の運動方程式を変分原理から導いてみる。

$$I = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \{-m_i c \sqrt{-\dot{z}_\mu(i) \dot{z}^\mu(i)} + e_i A_\mu(i) \dot{z}^\mu(i)\} d\tau_i - \frac{1}{4\mu_0} \int f_{\mu\nu}(x) f^{\mu\nu}(x) d^3x dt \quad (17.11)$$

を(27.4)の規則にしたがって書き換えると、

τ_i は第 i 番目の粒子の固有時間

$$I = \sum_{i=1}^N \int \{-m_i c \sqrt{-g_{\mu\nu}(i) \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i)} + e_i A_\mu(i) \dot{z}^\mu(i)\} d\tau_i - \frac{1}{4\mu_0 c} \int f_{\alpha\beta} f_{\rho\sigma} g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \sqrt{-g} d^4x. \quad (27.8)$$

なお、積分に関しては特殊相対論における d^4x は、一般相対論では $\sqrt{-g} d^4x$ に置き換えねばならない。

一般相対論への書き換え(1)

(27.8)は次のように書き表される。

$$I = \int L(x) d^3x dt, \quad (27.8)'$$

$$\begin{aligned} L(x) = \sum_{i=1}^N \int & \{ -m_i c^2 \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i)} \\ & + e_i c A_\mu(x) \dot{z}^\mu(i) \} \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i \\ & - \frac{1}{4\mu_0} \sqrt{-g} g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} f_{\alpha\beta} f_{\rho\sigma}(x). \end{aligned} \quad (27.9)$$

(27.8)を $z^\mu(i)$ について変分し、 τ_i が固有時間であること、すなわち

$$\sqrt{-g_{\mu\nu}(i) \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i)} = c, \quad \dot{z}(i) \equiv \frac{dz(i)}{d\tau_i}$$

という条件を使えば

$$\frac{\partial^2 z^\lambda(i)}{\partial \tau_i^2} \equiv \ddot{z}^\lambda(i) + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}(i) \dot{z}^\rho(i) \dot{z}^\sigma(i)$$

が導かれる。

$$= \frac{e_i}{m_i} f^{\lambda\rho}(i) \dot{z}_\rho(i) \quad (27.10)$$

一般相対論への書き換え(2)

(27.8)'を $A_\mu(x)$ について変分すれば

$$\partial_\nu f^{\mu\nu}(x) = \mu_0 \sum_i e_i c \int \dot{z}^\mu(i) \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i \quad (27.11)$$

これは、

$$m_i \frac{d^2 z^\mu(i)}{d\tau_i^2} = e_i f^{\mu\nu}(i) \dot{z}_\nu(i). \quad (17.5)$$

を一般相対論的に書き換えたものである。

電磁場と相互作用しているときの作用積分(17.4)、

$$I = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -m_i c \sqrt{-\frac{dz_\mu(i)}{d\lambda_i} \frac{dz^\mu(i)}{d\lambda_i}} + e_i A_\nu(i) \frac{dz^\nu(i)}{d\lambda_i} \right\} d\lambda_i$$

をまとめて $\mathbf{j}^\mu(x) \stackrel{d}{=} \sum_i e_i c \int \dot{z}^\mu(i) \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i \quad (27.12) \quad \text{とおけば}$

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 \mathbf{j}^\mu \quad (27.11)'$$

となり、(27.2)'と一致する。

ベクトル密度

ある測地点 x において測地系 $\bar{x}$ を設け、 δ 関数の変換則を使えば、(27.12)の右辺は

$$\mathbf{j}^\mu(x) = \frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \sum_i \left[e_i c \int \frac{d\bar{z}^\nu(i)}{d\tau_i} \delta^4\{\bar{x} - \bar{z}(i)\} d\tau_i \right] \quad (27.12)'$$

この右辺の $\sum_i [\]$ はすべて無重力系から見た量である。
したがって(17.14)で定義された4元電流に他ならない。

また、

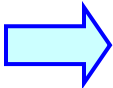
$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu}$$

を思い起こすと、

$$\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)} = \sqrt{-g(x)}$$

したがって、(27.12)'は

$$\mathbf{j}^\mu(x) = \sqrt{-g(x)} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{j}^\nu(\bar{x}) = \sqrt{-g(x)} j^\mu(x) \quad (27.12)''$$

 $\mathbf{j}^\mu$ は密度ベクトル

対称エネルギー運動量テンソル密度(1)

ここで扱っている物理系は重力場と相互作用しているために、荷電粒子と電磁場を一括した系の対称エネルギー運動量テンソル密度 $T^{\mu\nu}$ を簡単に導ける。一般的に $T^{\mu\nu}$ は、次の定義で与えられる。

$$T^{\mu\nu}(x) \stackrel{d}{=} -2 \frac{\partial L(x)}{\partial g_{\mu\nu}(x)}. \quad (27.13)$$

(27.9)を用いて、右辺を計算すると

$$T^{\mu\nu}(x) = -\sum_i m_i c \int \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i) \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i \\ - \frac{1}{\mu_0} \sqrt{-g} \left\{ f^{\mu\rho} f^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right\}. \quad (27.14)$$

この右辺第2項は $T^{\nu}_{\rho(e)} \stackrel{d}{=} -\frac{1}{\mu_0} \left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \delta^\nu_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right)$ (17.16) と同じ形をしている。つまりこれはエネルギー運動密度

$$T^{\mu\nu}_{(e)} \stackrel{d}{=} \sqrt{-g} T^{\mu\nu}_{(e)} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{\mu_0} \right) \left\{ f^{\mu\rho} f^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right\}$$

にほかならない。

対称エネルギー運動量テンソル密度(2)

(27.14)の右辺第1項は、さきに述べた j^μ と同様に

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x)_{(m)} &\stackrel{d}{=} -\sum_i m_i c \int \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i) \delta^4\{x-z(i)\} d\tau_i \\ &= \sqrt{-g(x)} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{T}^{\alpha\beta}(\bar{x})_{(m)} \\ &= \sqrt{-g(x)} T^{\mu\nu}(x)_{(m)} \end{aligned} \quad (27.15)$$

ここで、 $\bar{T}^{\alpha\beta}(\bar{x})_{(m)}$ は点 x における測地系 $\bar{x}$ を用いたときの粒子形のエネルギーテンソルを示し、それは

$$T^\nu_\rho(x)_{(m)} \stackrel{d}{=} -\sum_{i=1}^N m_i c \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\nu(i) \dot{z}_\rho(i) \delta^4\{x-z(i)\} d\tau_i$$

に他ならない。すなわち

$$\bar{T}^{\alpha\beta}(\bar{x})_{(m)} \stackrel{d}{=} -\sum_i m_i c \int \frac{d\bar{z}^\alpha(i)}{d\tau_i} \frac{d\bar{z}^\beta(i)}{d\tau_i} \delta^4\{\bar{x}-\bar{z}(i)\} d\tau_i$$

である。あるいは

これは $T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)_{(m)} = -\rho(\vec{x}, t) u^\mu(t) u^\nu(t)$ (17.20) のように、

$\bar{T}^{\alpha\beta}(\bar{x})_{(m)} = -\bar{\rho}(\bar{x}) \bar{u}^\alpha(\bar{x}) \bar{u}^\beta(\bar{x})$. (27.15)' とも書き表される。

対称エネルギー運動量テンソル密度(3)

ここで $\bar{\rho}(\bar{x})$ は点 $\bar{x}$ における局所Lorentz系のうち、特に粒子の静止系から眺めた場合、粒子の集団の $\bar{x}$ における静止質量密度をあらわすスカラー量

また、 $\bar{u}^\alpha(\bar{x})$ は点 $\bar{x}$ にある粒子の $\bar{x}$ 系からみた4元速度である。
(27.15)'を使えば、(27.15)は

$$T^{\mu\nu}(x)_{(m)} = -\sqrt{-g(x)}\rho(x)u^\mu(x)u^\nu(x) \quad (27.15)''$$

$\rho(x)=\bar{\rho}(\bar{x})$ は一般系からみたスカラー量 ρ を表す。

$u^\mu(x)$ も点 x にある粒子の一般系からみた速度ベクトルである。

➡ 以上の結果より、(27.14)が全系のエネルギーテンソル密度であることがわかる。

保存則の証明

保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (27.16) を証明してみる。

まず(27.11)、(27.12)を使うと

$$\sqrt{-g}\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{(e)} = f^\nu_\lambda \mathbf{j}^\lambda = \sum_i c e_i \int f^\nu_\lambda(i) \dot{z}^\lambda(i) \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i.$$

この右辺に(27.10)を代入すると

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{(e)} = \sum_i m_i c \int \{ \ddot{z}^\nu(i) + \Gamma^\nu_{\rho\sigma}(x) \dot{z}^\rho(i) \dot{z}^\sigma(i) \} \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i$$

右辺第1項は、これを部分積分し、定義(27.15)を使うと

$$\sum_i m_i c \int \dot{z}^\nu(i) \dot{z}^\sigma(i) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i = - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} T^{\nu\sigma}(x)_{(m)}.$$

したがって、

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{(e)} = - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} T^{\sigma\nu}_{(m)} - \Gamma^\nu_{\rho\sigma}(x) T^{\rho\sigma}_{(m)} = - \nabla_\sigma T^{\sigma\nu}_{(m)}$$

となり、証明された。

特殊相対論→一般相対論(2)

(27.16)の添え字 ν を下に移すと

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma}$$

この右辺は一般には0とならない、これは重力場との相互作用を表す、
そのために

$$J_\nu \equiv \int T^0{}_\nu d^3x$$

は一定とならず、とともにその値が変化する、これは粒子や電磁場と重力場のあいだにエネルギー運動量のやりとりがあるからである。

以上の議論より、特殊相対論を一般相対論に書き換えるには

$g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$

の作業をしてやればよい。

さらに対称エネルギーテンソルを導く処方はその場合も使え、
その時のエネルギー密度 J_ν は一定値となり、保存則が成立する。