

相対論ゼミ 第10回目

24. 平行移動、共変微分、測地系

2010/10/28 担当：鈴木

平行移動 (1)

$\partial_\nu V^\mu$ が異なる世界点における V^μ の差に等しい為、
任意のベクトル $V^\mu(x)$ の微分 $\partial_\nu V^\mu$ は、一般座標に対してテンソルではない

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{V^\mu(x^\nu + \varepsilon) - V^\mu(x^\nu)\} \quad (24.1)$$



点 x から点 $x + \varepsilon$ まで $V^\mu(x)$ を“平行移動させた結果を
 $V^\mu(x + \varepsilon)_{//}$ と書き、 V^μ の微分を

$$\lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \{V^\mu(x + \varepsilon) - V^\mu(x + \varepsilon)_{//}\}$$

と定義すれば、この微分は座標系の取り方に無関係な意味を持つ



平行移動 (2)

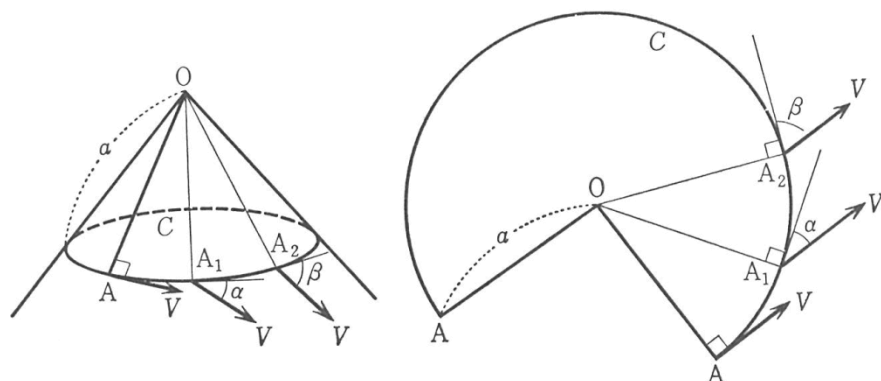
平行の定義

Minkowski空間 $V^\mu(x+\varepsilon)_{//} = V^\mu(x)$ (24. 2)

Riemann空間 $V^\mu(x+\Delta x)_{//} - V^\mu(x) \stackrel{d}{=} \Delta x^\nu X^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda$ (24. 3)

Riemann空間での平行の例

円錐面は、このように切り開いた場合、2次元Euclid空間の一部と同等である。したがって、点AにあるベクトルVを円周Cにそって平行移動させるとき、A₁ではVと円周との間の角はα、A₂ではβ(>α)となる。つまり、 $V(A_1)_{//}$ は $V(A)$ は角αの回転という一次変換を施したものである



Aは無限小移動量 $\overline{AA_1}$ に比例する。
 この実例を一般的に数式化したものが
 (24.3)である。
 右辺の比例係数 $X^\mu_{\nu\lambda}$ は一般的には
 Xの係数だが、それがどのようなものかは、
 問題にしているRiemann空間の性質により
 異なる。

図 11

共変微分

(24.3)を使うとベクトル V^μ の微分は

$$\begin{aligned}\nabla_\nu V^\mu &\stackrel{d}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)}{\Delta x^\nu} - X^\mu{}_{\nu\lambda} V^\lambda \\ &= \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} - X^\mu{}_{\nu\lambda} V^\lambda\end{aligned}\tag{24.4}$$

と書ける。これを V^μ の共変微分(covariant derivative)という。

$\nabla_\nu V^\mu$ が一般座標系に対して混合テンソルであるという要請から、
係数 $X^\mu{}_{\nu\lambda}$ の変換性は

$$X^\mu{}_{\nu\rho'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{\rho'}} X^\alpha{}_{\beta r}(x) + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^r} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{\rho'}}\tag{24.5}$$



アフィン接続、アフィン係数

(24.5)の右辺第二項が存在するために、 X は一般座標変換に対してテンソルではない
だがしかし、アフィン変換に限るなら、第二項は0となる

→ X はアフィン・テンソル

(24.3)で与えた平行移動の定義から、 $V^\mu(x)$ とこれに対応する
点 $x + \Delta x$ におけるベクトル $V^\mu(x + \Delta x)_{//}$ の間には線形の結びつきが存在する

→ この線形関係をアフィン接続 (affine connection) と呼び

X を接続係数、またはアフィン係数 (affine coefficient) と呼ぶ

アフィン係数はテンソルではないが、2種のアフィン係数 $X^\mu_{\nu\rho}(x)$, $Y^\mu_{\nu\rho}(x)$
があるとき、これらの差 $Z = X - Y$ は(24.5)により

$$Z^\mu_{\nu\rho}'(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\rho'}} Z^\alpha_{\beta\gamma}(x)$$

となり、一般変換に対してテンソルである



反変ベクトル以外の量の共変微分の定義

まず、次のような演算規則を定義する

(i) S がスカラーなら $\nabla_\mu S \stackrel{d}{=} \partial S / \partial x^\mu$.

(ii) 2 個の任意のテンソル A, B に対して

$$\nabla_\mu (A \cdot B) \stackrel{d}{=} \nabla_\mu A \cdot B + A \cdot \nabla_\mu B.$$

いま任意のベクトル A^μ, B_μ に対して $S = A^\mu B_\mu$ とおけば, (i),

(ii) から

$$\partial_\nu (A^\mu B_\mu) = \nabla_\nu (A^\mu B_\mu) = (\partial_\nu A^\mu - X^\mu_{\nu\rho} A^\rho) B_\mu + A^\mu \nabla_\nu B_\mu.$$

この両辺を比べれば共変ベクトルに対する共変微分の定義は

$$\nabla_\nu B_\mu \stackrel{d}{=} \partial_\nu B_\mu + X^\lambda_{\nu\mu} B_\lambda. \quad (24.6)$$

(ii) を繰り返し使用すれば、テンソルの共変微分の定義は

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu}_\rho \stackrel{d}{=} \partial_\lambda T^{\mu\nu}_\rho - X^\mu_{\lambda\tau} T^{\tau\nu}_\rho - X^\nu_{\lambda\tau} T^{\mu\tau}_\rho + X^\tau_{\lambda\rho} T^{\mu\nu}_\tau.$$



Christoffelの3指標記号 (1)

Euclid幾何学における平行とおなじような定義をRiemann幾何学にも採用したい

→「ベクトルの大きさは平行移動に対して普遍である」という要請を設ける

式で表すと

$$g_{\mu\nu}(x + \Delta x) V^\mu(x + \Delta x)_{//} \cdot V^\nu(x + \Delta x)_{//} = g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) V^\nu(x) \quad (24.8)$$

(24.8)の左辺に(24.3)を代入すると

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = -(X_{\mu,\lambda\nu} + X_{\nu,\lambda\mu}), \quad X_{\mu,\lambda\nu} \stackrel{d}{=} g_{\mu\rho} X^\rho_{\lambda\nu} \quad (24.9)$$

λ, μ, ν を循環的に入れ替えると

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = -(X_{\nu,\mu\lambda} + X_{\lambda,\mu\nu}),$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = -(X_{\lambda,\nu\mu} + X_{\mu,\nu\lambda}).$$

これらのうち下2個の式の和から最小の式をひく、さらに $X_{\mu,\lambda\nu} = X_{\mu,\nu\lambda}$ と仮定すれば

$$-X_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \stackrel{d}{=} \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \quad (24.9)'$$

Christoffelの3指標記号 (2)

また

$$-X^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(-\partial_{\rho}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu}) \stackrel{d}{=} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \quad (24.9)''$$

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \stackrel{d}{=} g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho,\mu\nu}$$

が求まる。ここで定義された Γ はChristoffelの3指標記号と呼ばれる。

点 x と $x + \Delta x$ におけるベクトルの対応 $V(x) \rightarrow V(x + \Delta x)_{//}$

が上で求めた Γ を用いて定義されるとき、この対応をとくに

リーマン接続(Riemannian connection)という



Christoffelの3指標記号 (3)

主な公式を Γ を使って書き直してみる

$$\text{変換則: } \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\sigma'}} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) - \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\sigma'}},$$

(24. 5)'

$$\text{平行移動: } V^{\mu}(x + \Delta x)_{//} \stackrel{d}{=} V^{\mu}(x) - \Delta x^{\lambda} \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x) V^{\nu}(x), \quad (24. 3)'$$

$$\text{共変微分: } \nabla_{\alpha} T^{\mu\nu}{}_{\lambda} \stackrel{d}{=} \partial_{\alpha} T^{\mu\nu}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} T^{\beta\nu}{}_{\lambda} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} T^{\mu\beta}{}_{\lambda} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\lambda} T^{\mu\nu}{}_{\beta}.$$

(24. 7)'



Christoffelの3指標記号 (4)

なお、(24.9)は

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} \stackrel{d}{=} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\mu} g_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} g_{\mu\tau} = 0 \quad (24.9)'''$$

これを使えば $\nabla_{\lambda} g^{\mu\nu} = 0$ も証明できる

従って共変微分に関しては、 $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ は定数と扱ってよい

したがって、テンソル密度に対しても、

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) &\stackrel{d}{=} \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} T^{\mu\nu} \\ &= \partial_{\lambda} T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} T^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} T^{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} T^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (24.10)$$

と定義すればよい。右辺の最後の項がテンソルの共変微分と異なる



Christoffelの3指標記号 (5)

ここで、しばしば使われる公式をひとつ。

(24.9)''を λ と ν に付いて縮約すれば

$$\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}\partial_\mu g_{\nu\rho}. \quad (24.11)$$

ところで、行列式 g の要素 $g_{\mu\nu}$ に対する余因子は $gg^{\mu\nu}$ であるから、

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = gg^{\rho\nu}\partial_\mu g_{\rho\nu}. \quad (24.12)$$

したがって $\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \partial_\mu \log \sqrt{-g}$ (24.11)'

とかくことができる。なお $g_{\mu\nu}$ の変分に関して

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \\ \delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (24.13)$$

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

の関係が良く使われる



測地系

Γの変観測(24.5)'にはΓに無関係な項が存在する。このために、或るS系では、任意のひとつの世界点PにおけるΓの成分のなかに0でないものがあつたとしても新しい座標系S'を適当に選べば、PにおけるΓ'のすべての成分を0にできる。

$$\frac{\partial u^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial u^\rho \partial u^\sigma} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right) \stackrel{a}{=} \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}. \quad (19.9)$$

$$-X^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu}) \stackrel{a}{=} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (24.9)''$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \stackrel{a}{=} g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho,\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 u^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} \frac{du^\rho}{d\tau} \frac{du^\sigma}{d\tau} \quad (19.8)''$$

上記3式を見比べればΓが質点に働く重力を表すことがわかる。

測地系

したがって、 S' 系は P における局所的Lorentz系に他ならない
幾何学では、或る座標系を採るとき、1点 P における Γ がすべて0となる場合、
この座標系は P において測地的(*geodesic*)であるという
またこの座標系を P におけう測地座標系、
あるいは測地系(*system of geodesic coordinates*)という。
→等価原理を幾何学的に言えば、
任意の世界点で測地系を設けることが必ず出来るということ。



問題

$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ を証明せよ

ヒント: $\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu_{\tau\lambda} g_{\tau\nu} - \Gamma^\nu_{\tau\lambda} g_{\mu\tau}$

答え:
$$\begin{aligned}\nabla_\lambda g^{\mu\nu} &= \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\tau\lambda} g_{\tau\nu} + \Gamma^\nu_{\tau\lambda} g_{\mu\tau} \\ &= 0\end{aligned}$$

