

第2章 テンソル算

2010/7/22(木)

相対性理論輪講：第2回目

Suzuki Rieko

特殊ローレンツ変換

特殊Lorentz変換の復習

二つの慣性系Sと、Sに対しx軸の正方向に一定の速さ v で走り続けるS'を結ぶ関係式は

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y = y', z = z'$$

で表される。

しかし、一般には慣性系Sに対するS'の運動方向はx軸に平行であるとは限らず、またS'の直交軸もSのそれに平行である必要はない。

➡ 一般のLorentz変換を考えてみよう

一般のLorentz変換(1)

数学的に理解を深めるため、座標を t や x, y, z の代わりに、

$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ と定義された $x^i (0,1,2,3)$

をもってS系の世界点P（何か事件が起こった場所）を表すとする。

同じ世界点Pを慣性系S'から眺めた場合、その座標を $x^{i'}$ とする。

ところで相対性原理によれば質点の運動をSから眺めたとき、

それが等速直線運動しているならば、S'から眺めても、それは

等速直線運動していなければならない。よって、一般式は

$$x^{u'} = \sum_{v=0}^3 a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu} \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

a^{μ}_{ν} : 4×4 個の未定係数、 b^{μ} : 4 個の任意の定数

$b^{\mu} = 0$ の場合はS系S'系の原点が一致する。

アインシュタインの縮約

アインシュタインの縮約

$$x^{u'} = \sum_{v=0}^3 a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}$$

のように、和を取るのと同じ記号で、上下に現れた場合は、

$$x^{u'} = \sum_{v=0}^3 a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

と Σ を省略して書くことが出来る。

一般のLorentz変換(2)

$$x^{\mu'} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

は、特殊一般相対性原理の要請に従う最も一般的な関係式だが、
これだけではLorentz変換と呼ぶには、まだ制限がゆるい。
光速度不変の原理にもとづく条件

$$-(x^0)^2 + \sum_{\kappa=1}^3 (x^{\kappa})^2 = -(x^{0'})^2 + \sum_{\kappa=1}^3 (x^{\kappa'})^2$$

を付け加えなくてはならない。

ここで

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \\ -1 & (\mu = \nu = 0) \end{cases}$$

これを使うと $-(x^0)^2 + \sum_{\kappa=1}^3 (x^{\kappa})^2 = -(x^{0'})^2 + \sum_{\kappa=1}^3 (x^{\kappa'})^2$ は

$$\eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = \eta_{\mu'\nu'} x^{\mu'} x^{\nu'}$$

と書き直せる。

一般のLorentz変換(3)

一般のLorentz変換の定義 (1)

任意の世界点PのS, S'からみた座標をそれぞれ x^μ , $x^{\mu'}$ とする。

いま x^μ と $x^{\mu'}$ のあいだの関係 $x^{\mu'} = a^\mu_{\nu} x^\nu$ が条件 $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu'\nu'} x^{\mu'} x^{\nu'}$ を満たすとき、変換 $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ はLorentz変換である。

$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu'\nu'} x^{\mu'} x^{\nu'}$ の右辺に $x^{\mu'} = a^\mu_{\nu} x^\nu$ を代入して x の係数を比較すると

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} a^{\rho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu}$$

一般のLorentz変換の定義 (2)

$x^{\mu'} = a^\mu_{\nu} x^\nu$ で定義された座標変換 $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ において、その係数 a^μ_{ν} が $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} a^{\rho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu}$ を満たすとき、それはLorentz変換である。

一般のLorentz変換(4)

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\nu$ は添え字 μ, ν に対して対称なので、10個の制限を係数 $a^\mu{}_\nu$ に付与する。従って変換 $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ の自由度は6しかない。

以下田嶋君を参照

Minkowski空間(1)

ここで3次元Euclid空間内に設けた直交座標系Kの回転問題を考える。
空間内の任意の一点Pの位置は、Kを基準にした直行座標

$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ により指定される。

いっぽう直交座標系K'（ただし原点はKと一致）から見た点Pの座標を
 $x'_k (k=1,2,3)$ とすると $x'_k = \sum_{l=1}^3 c_{kl} x_l$ となる。

c_{kl} は、両系の軸の間の相対関係に決まる定数で、

$$\sum_{k,l=1}^3 \delta_{kl} c_{ka} x_{lb} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$$

という条件を満たしている。

Minkowski空間(2)

先に出てきた式と第5節に出てきた式の違いは

- ・ 添え字が0,1,2,3か0,1,2か
- ・ 距離の定義が $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ か $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$

である。第5節に出てきた4次元時空は、その幾何学的性質が4次元Euclid空間に似ているが、距離の定義式の中に $-(x^0)^2$ という項が出てくる点で異なる。

だい5節出てきたような空間をMinkowski空間という。

Minkowski空間(3)

4次元Euclid空間とMinkowski空間の違いをよりはっきりさせるには
4次元時空の時間座標 $x^4 = ict = ix^0$ を採用すればよい。
この x^4 は虚時間とよばれる。これを用いれば、4次元時空でも原点Oと
世界点Pの距離の二乗は

$$s^2 = \sum_{\mu=1}^4 (x^\mu)^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^4 \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

となる。つまり見かけ上では4次元Euclid空間の距離の定義と全く
同じである。しかし、 x^4 は虚数である為、 s^2 必ずしも正であるとは
限らない。これは、回転角が虚数である場合があるためだ。

スカラー

座標系 S 及び S' からみた、同一世界点 P の 4 次元座標をそれぞれ x^μ, x^ν とする。これらの間には $x^{\mu'} = a^\mu_{\nu'} x^\nu + b^\mu$ という線形関係がなりたち、その係数は $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a^\rho_{\mu} a^\sigma_{\nu}$ を満足しているものとする。

スカラー

ある物理量の S ならびに S' を基準とした場合の値をそれぞれ C, C' とするとき、常に $C = C'$ が成り立つなら C はスカラー

スカラー場

4 次元時空内の或る領域に渡って、或る物理量が分布しており、 S, S'_d を基準とした場合、それぞれ

$$\Theta(x) \equiv \Theta(x^0, x^1, x^2, x^3), \Theta'(x') \equiv \Theta'(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

で表されるとき、もし上記領域内の全点において

$$\Theta(x) = \Theta'(x') \text{ が成り立つなら、} \Theta(x) \text{ はスカラー場}$$

反変ベクトル

反変ベクトル

いま 4 個の成分をもつ物理量 S , S' 系を基準にした場合のそれぞれの成分を $A^\mu, A^{\mu'} (\mu = 0, 1, 2, 3)$ とする。これらの間に

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu = a^\mu_{\nu} A^\nu$$

という関係式が成立するとき、この量を反変ベクトルという。

反変ベクトル場

A^μ が世界点の座標 x の関数で、これを、 S 、 S' 系から眺めたとき、それぞれ $A^\mu(x), A^{\mu'}(x')$ とする。

$$A^{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu(x)$$

が、成り立つ場合、 $A^\mu(x)$ を反変ベクトル場という。

共変ベクトル

共変ベクトル

いま4個の成分をもつ物理量 S , S' 系を基準にした場合のそれぞれの成分を $B_\mu, B'_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ とする。これらの間に

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} B_\nu$$

という関係式が成立するとき、この量を共変ベクトルという。

共変ベクトル場

A^μ が世界点の座標 x の関数で、これを、 S 、 S' 系から眺めたとき、それぞれ $B_\mu(x), B'_\mu(x')$ とする。

$$B'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} B_\nu(x)$$

が、成り立つ場合、 $B_\mu(x)$ を共変ベクトル場という。

テンソル

テンソル

まず例として、2個の反変ベクトル場 $A^\mu(x), B^\nu(x)$ を考える。
これらの各々から任意に取り出した成分の積を作る。

$$C^{\mu\nu}(x) \equiv A^\mu(x) B^\nu(x)$$

さらに、S'系を基準にして行つたとすると、

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu}(x') &\equiv A^{\mu'}(x') B^{\nu'}(x') = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} A^\rho(x) B^\sigma(x) \\ &= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} C^{\rho\sigma}(x) \end{aligned}$$

という関係式が導かれる。

一般的にLorentz変換に対して $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ に対して $C^{\mu\nu}(x) \rightarrow C^{\mu'\nu'}(x')$ となったとき、両者の間に

$$C^{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} C^{\rho\sigma}(x)$$

が成り立つとき、Cを2階反変テンソル場という。

テンソル

前ページの説明より、一般のテンソルの定義は以下のようになる。
ある量 $T(x)$ の S, S' から見た成分をそれぞれ

$$T^{ab\cdots c}_{ij\cdots k}(x) \text{ および、 } T^{\lambda\mu\cdots\nu}_{\rho\sigma\cdots\tau}'(x')$$

とする。これらが

$$T^{\lambda\mu\cdots\nu}_{\rho\sigma\cdots\tau}'(x') = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^b} \cdots \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^c} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\sigma}} \cdots \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{\tau}} T^{ab\cdots c}_{ij\cdots k}(x)$$

という関係で結ばれるとき $T(x)$ を **テンソル場** という。

この例で上付き添え字が r 個、下付き添え字が s の場合

T は r 階反変、 s 階共変の **混合テンソル** という。

さらに、添え字が上付きだけのときは **r 階反変テンソル**

下付きだけのときは **s 階共変テンソル** という。