

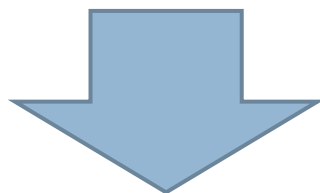
相対論 15回目

角谷

今回の目的

Newtonの法則

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$



重力場の方程式

$$G^{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$$

重力場の方程式

□ Newtonの法則は

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (28.1)$$

で、

重力場の方程式を

Φ : Newtonの重力ポテンシャル
 ρ : 物質の質量密度
 G : 万有引力定数

$$F^{\mu\nu} = \alpha X^{\mu\nu} \quad (28.2)$$

という形をしていると考えられる

$F^{\mu\nu}, X^{\mu\nu}$: 対称のテンソル
 α : 未定の比例係数

(28.2)の左辺は $g_{\mu\nu}$ か、その微係数だけの関数

右辺は重力の源となる物質に関する量

重力場の方程式

- 重力場が静的で、非常に弱い場合
重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ は、

$$g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right) \quad (28.3) \quad \text{となる}$$

- 粒子系のエネルギーテンソル $T^{\mu\nu}_{(m)}$ が静的な場合

$$T^{\mu\nu}(x)_{(m)} = -\sqrt{-g(x)}\rho(x)u^\mu(x)u^\nu(x) \quad (27.15)''$$

$$T^{\mu\nu}_{(m)} = \begin{cases} -\rho(x)c^2: & \mu=\nu=0 \text{ のとき} \\ 0 & : \text{その他の成分} \end{cases}$$

重力場の方程式

□ $T^{\mu\nu}_{(m)}$ は

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \text{ と } F^{\mu\nu}\left(g, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = \alpha T^{\mu\nu} \quad (28.2)'$$

の式を満たさなくてははいけない。

つまり、上の2式は

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} \equiv 0 \quad (28.4)$$

となる。 $F^{\mu\nu}$ の条件は

(i) $F^{\mu\nu}$ は $g, \partial g/\partial x, \partial^2 g/\partial x \partial x$ だけから作られた対称テンソルである。

(ii) $F^{\mu\nu}$ は $\partial^2 g/\partial x \partial x$ について 1 次式である。

(iii) 恒等式 (28.4) を満足する。

重力場の方程式

□ 下の3つの条件に満たすものは

(i) $F^{\mu\nu}$ は g , $\partial g/\partial x$, $\partial^2 g/\partial x \partial x$ だけから作られた対称テンソルである。

(ii) $F^{\mu\nu}$ は $\partial^2 g/\partial x \partial x$ について 1 次式である。

(iii) 恒等式(28.4)を満足する。

$c_1 G^{\mu\nu} + c_2 g^{\mu\nu}$ に限られる。

重力場の方程式は

$$G^{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (28.5)$$

である

κ : Einsteinの重力定数

λ : 宇宙定数

宇宙項は非常に小さいため無視すると

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \quad (28.6) \quad \text{となる}$$

重力場の方程式

- 電磁場と重力場だけが相互作用している場合
電磁場に関する部分だけとりだし、

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left\{ f^{\mu\rho} f^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right\} \quad (28.7)$$

となる。これを $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu} \quad (28.6)$

に代入すると、電磁場がどのような重力場をだすかわかる。

重力場の方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}$$

(28.6) に $g_{\mu\nu}$ をかけると

$$-R = \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \stackrel{d}{=} \kappa T$$

となる。したがって(28.6)

のかわりに、

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T \right) \quad (28.6)'$$

と置くことができる。ここで $T^{\mu\nu}$ に $T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left\{ f^{\mu\rho} f^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right\}$ (28.7)

を代入すると、 $T=0$ となり、

$$R^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (28.6)''$$

となる

重力場の方程式

$$R^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad (28.6)'' \quad \text{を} \quad \square A^\lambda + R^\lambda{}_\rho A^\rho = -\mu_0 j^\lambda \quad (27.7)$$

に代入すると、
重力場の中を伝播する電磁波の方程式は

$$\square A^\lambda - \frac{\kappa}{\mu_0} \left(f^{\lambda\rho} f_{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta^\lambda{}_\nu f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right) A^\nu = 0 \quad (27.7)'$$

となる。

重力場の方程式

- 多数の粒子の集団が重力場と相互作用している場合は、

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x)_{(m)} &\stackrel{d}{=} -\sum_i m_i c \int \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i) \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i \\ &= \sqrt{-g(x)} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{T}^{\alpha\beta}(\bar{x})_{(m)} \\ &= \sqrt{-g(x)} T^{\mu\nu}(x)_{(m)} \end{aligned} \quad (27.15)$$

の、

$$T^{\mu\nu}(x) = -\sum_{i=1}^N m_i c \int \dot{z}^\mu(i) \dot{z}^\nu(i) \delta^4\{x - z(i)\} d\tau_i$$

となる。もしくは、

$$T^{\mu\nu}(x) = -\rho(x) u^\mu(x) u^\nu(x) \quad (28.8)$$

ともなる

重力場の方程式

- 物質が何も存在しない真空の中の重力場の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0$$

これを縮約すると、 $R=0$ となるから、

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (28.10)$$

となる。

$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$ のとき、その領域を平坦(flat)という