

相対論 12回目

角谷

曲率

共変微分は一般に可換ではない



任意のベクトル V^α に対して

$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha$ は0とならない

計算すると

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha \stackrel{d}{=} \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta \quad (25.1)$$

Riemann-Christoffelの曲率

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \stackrel{d}{=} \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\beta} \quad (25.2)$$

C_1 を通過して S に到達
したものを $V^{\mu}(S, C_1)_{//}$

$$V^{\mu}(Q)_{//} = V^{\mu}(P) - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(P)V^{\nu}(P)\Delta_1 x^{\alpha}(P).$$

$$\Delta_1 x^{\alpha} \stackrel{d}{=} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u} \Delta u.$$

$$V^{\mu}(S, C_1)_{//} = V^{\mu}(Q)_{//} - \Gamma^{\mu}_{\beta\nu}(Q)V^{\nu}(Q)_{//}\Delta_2 x^{\beta}(Q),$$

$$\Delta_2 x^{\beta} \stackrel{d}{=} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial v} \Delta v.$$

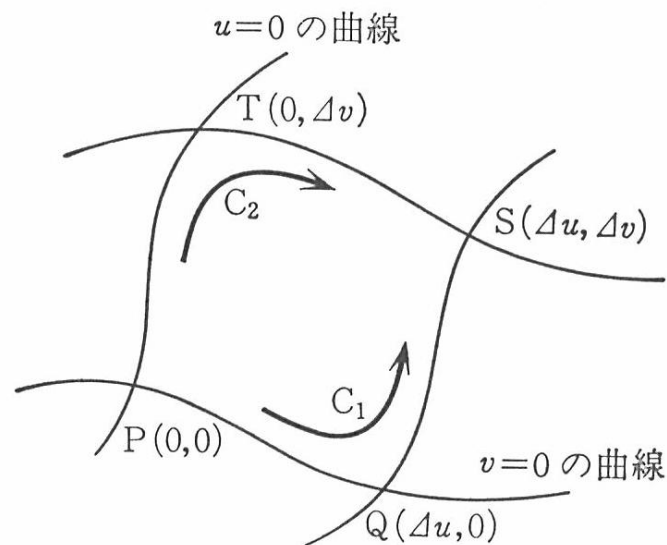
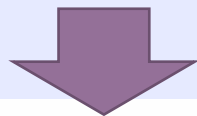


図 12

Riemann-Christoffelの曲率



$$V^\mu(S, C_1)_{//} = V^\mu(P) + \{(\Gamma^\mu_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\rho} - \partial_\alpha\Gamma^\mu_{\beta\rho})V^\rho\Delta_1x^\alpha\Delta_2x^\beta\}_P \\ + (u, v \text{ について対称な項}).$$

uとvを入れかえれば $V^\mu(S, C_2)_{//}$ が求まるから

$$V^\mu(S, C_1)_{//} - V^\mu(S, C_2)_{//} = -R^\mu_{\rho\alpha\beta}V^\rho\Delta_1x^\alpha\Delta_2x^\beta \\ = -\frac{1}{2}R^\mu_{\rho\alpha\beta}V^\rho\Delta\sigma^{\alpha\beta} \quad (25.3)$$

$\neq 0$

$V^\mu(S, C_1)_{//}$ と $V^\mu(S, C_2)_{//}$
は空間が歪んでいるため
一致しない

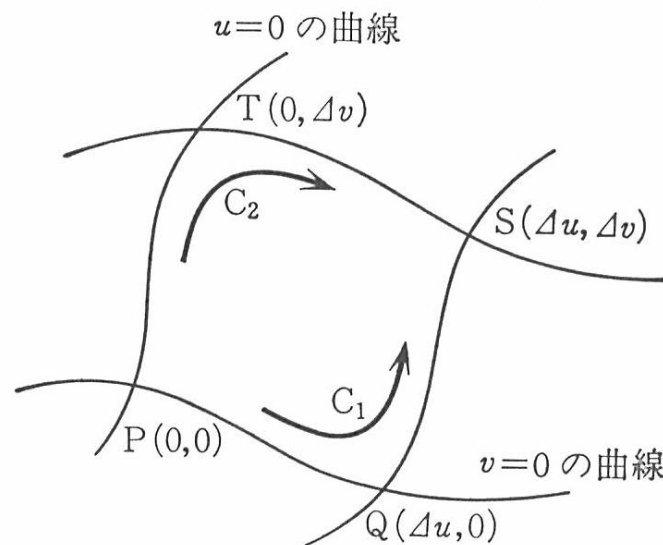


図 12

Riemann-Christoffelの曲率

曲率テンソルの添字の二三の対称性がある

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \stackrel{d}{=} g_{\alpha\gamma} R^{\gamma}_{\beta\mu\nu} \quad (25.2)'$$

とすると、以下のような対称性が導かれる

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu}, & R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Riemann-Christoffelの曲率

$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ を R_{AB} とすれば、 $R_{AB}=R_{BA}$ となるため、 R_{AB} は 6×6 の対称行列と考えられるので、独立成分は21個であるが、

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\lambda} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} = 0 \quad (25.5)$$

という関係式より、

$$R_{0123} + R_{0231} + R_{0312} = 0 \quad (25.5)'$$

となり、Riemann-Christoffelの曲率は
20個となる

Bianchiの恒等式

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\lambda} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} = 0 \quad (25.5) \quad \text{の証明}$$

$$\nabla_\lambda [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = \nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} \cdot V^\beta + R^\alpha_{\beta\mu\nu} \cdot \nabla_\lambda V^\beta.$$

また少し面倒な計算をすると

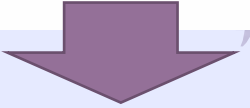
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\lambda V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} \cdot \nabla_\lambda V^\beta - R^\tau_{\lambda\mu\nu} \cdot \nabla_\tau V^\alpha$$

となる．そこで両者の差を求めると

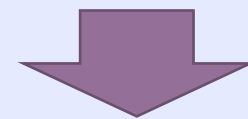
$$[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] V^\alpha = \nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} \cdot V^\beta + R^\tau_{\lambda\mu\nu} \cdot \nabla_\tau V^\alpha. \quad (25.6)$$

λ, μ, ν を順々におきかえれば

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]] V^\alpha = \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda} \cdot V^\beta + R^\tau_{\mu\nu\lambda} \cdot \nabla_\tau V^\alpha,$$

$$[\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]] V^\alpha = \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu} \cdot V^\beta + R^\tau_{\nu\lambda\mu} \cdot \nabla_\tau V^\alpha.$$


Bianchiの恒等式



これら 3 個の式を加えると左辺は Jacobi の恒等式のために 0 となる。したがって

$$0 \equiv (\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu}) \cdot V^\beta \\ + (R^\tau_{\lambda\mu\nu} + R^\tau_{\mu\nu\lambda} + R^\tau_{\nu\lambda\mu}) \nabla_\tau V^\alpha.$$

時空内の任意の点において、 V^β 、および $\nabla_\tau V^\alpha$ の成分の値は全く任意に、また互いに独立に選びうる。したがって上の恒等式は

$$\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu} \equiv 0, \quad (25.7)$$

$$R^\tau_{\lambda\mu\nu} + R^\tau_{\mu\nu\lambda} + R^\tau_{\nu\lambda\mu} \equiv 0 \quad (25.8)$$

(25.7)はBianchiの恒等式と
呼ばれる重要な式である

Ricciのテンソル

4階の曲率テンソルから縮約によりつぎのような量が導かれる.

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\stackrel{d}{=} R^{\alpha}{}_{\nu\mu\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} \\ &= R_{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (25.9)$$

$$R \stackrel{d}{=} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (25.10)$$

(25.9)の右辺の第一項は μ, ν について対称であり、(25.7)の α, ν を縮約すると

$$\nabla_{\lambda}R_{\beta\mu} - \nabla_{\mu}R_{\beta\lambda} + \nabla_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} \equiv 0.$$

これに $g^{\lambda\beta}$ をかけ、 $\nabla_{\tau}g^{\lambda\beta}=0$ だから

$$2\nabla_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\mu} - \nabla_{\mu}R = 2\nabla_{\lambda}\left(R^{\lambda}{}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{\mu}R\right) \equiv 0$$

となる

$R_{\mu\nu}$: Ricciのテンソル
 R : スカラー曲率

Ricciのテンソル

$$2\nabla_\lambda R^\lambda_\mu - \nabla_\mu R = 2\nabla_\lambda \left(R^\lambda_\mu - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\mu R \right) \equiv 0$$

に、Einsteinのテンソル $G_{\mu\nu} \stackrel{d}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$
を使うと、 $\nabla_\lambda G^\lambda_\mu \equiv 0$ となる。

$G_{\mu\nu}, R_{\mu\nu}$ は2階対称テンソルである。

定理

定理 1 $g_{\mu\nu}$ およびその 1 階, 2 階微係数から作られ, 2 階微係数については 1 次式であるスカラー S は

$$S(x) = c_1 R(x) + c_2$$

以外にはない. c_1, c_2 は任意の定数である.

定理 2 $g_{\mu\nu}$, $\partial_\rho g_{\mu\nu}$, $\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}$ の関数で, $g_{\mu\nu}$ の 2 階微係数の 1 次式であらわされる 2 階対称テンソル $T^{\mu\nu}$ のうち, 恒等式

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv 0$$

を満たすものは

$$T^{\mu\nu} = c_1 G^{\mu\nu} + c_2 g^{\mu\nu}$$

だけである. c_1, c_2 は任意の定数である.