そ～たいろん　ななかいめ

ハミルトンのげんり～

～20100902～

最小作用の原理と作用積分

* 最小作用の原理とは？

運動というのは作用積分と呼ばれる量を最小にするような軌道に沿って行われる

* 作用積分とは？

$$I_0 = \int L_0 dt$$

で L_0 はLagrange関数

$$L_0 = T - V$$

T:運動エネルギー
V:ポテンシャルエネルギー

作用積分

質量m_i、電荷　e_i　$(i=1,2,\cdots,N)$ N個の点電荷が電磁場と相互作用している場合を考えてみる

まず、電磁場が作用していない場合・・・

第ｉ番目の電荷粒子の4次元座標を　$z^{\mu}(\lambda_i)$ または　$z^{\mu}(i)$ とする

作用積分

$$I_0=-\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}m_i c\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}z^{\mu}(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\frac{\mathrm{d}z^{\nu}(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}}\mathrm{d}\lambda_i \qquad (17.1)$$

となる

簡単にするために、すべての粒子を同じ時間座標にすると・・・

$$I=-\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}m_i c^2\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{z}(i)}{cdt}\right)^2}dt$$

このときLagrange関数は

$$L_0=-\sum_{i=1}^{N}m_i c^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{c\mathrm{d}t}\right)^2}, \qquad (17.1)'$$

運動方程式

また、$z^k(i)$ に対応する正準運動量 $p_k(i)$ は$\vec{p} = \frac{mv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$から

$$p_k(i) = \frac{\partial L_0}{\partial(\mathrm{d}z^k(i)/\mathrm{d}t)} = m_i \frac{\mathrm{d}z^k(i)}{\mathrm{d}t} \Big/ \sqrt{1-(\mathrm{d}\vec{z}(i)/c\mathrm{d}t)^2} \tag{17.2}$$

L_0に対応する$Hamilton$関数H_0は、$H = p \cdot v - L$から

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} c\sqrt{(m_i c)^2 + (\vec{p}(i))^2} \tag{17.3}$$

⇧

同じ系における粒子の全エネルギー

最小作用の原理からdI/dtが極小になるような軌道の運動をするので

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_i \mathrm{d}z^k(i)/\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(\mathrm{d}\vec{z}(i)/c\mathrm{d}t)^2}}\right) = 0$$

という運動方程式が出る

Eulerの方程式と基礎方程式

次に電磁場A^μと相互作用している時の作用積分は

$$I=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\underline{-m_i c\sqrt{-\frac{\mathrm{d}z_\mu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\frac{\mathrm{d}z^\mu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}}+e_i A_\nu(i)\frac{\mathrm{d}z^\nu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}}\Big\}\mathrm{d}\lambda_i$$

(17.4)

$L(i)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_i}\Big\{\frac{\partial L(i)}{\partial \dot{z}^\mu(i)}\Big\}=m_i\ddot{z}_\mu(i)+e_i\dot{z}^\nu(i)\Big\{\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}\Big\}_{x=z(i)}$$

=0となるため

そこで$\frac{\partial L(i)}{\partial z^\mu(i)}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\Big\{\frac{\partial L(i)}{\partial(\mathrm{d}z^\mu(i)/\mathrm{d}\lambda_i)}\Big\}$ を求めてみると、Eulerの方程式

$$e_i\dot{z}^\nu(i)\Big\{\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu}\Big\}_{x=z(i)}-m_i\ddot{z}_\mu(i)=0$$

と、基礎方程式

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2 z^\mu(i)}{\mathrm{d}\tau_i{}^2}=e_i f^{\mu\nu}(i)\dot{z}_\nu(i). \qquad (17.5)$$

が求まる

τ_iをi番目の粒子の固有時間とする

$$F^\mu=ef^{\mu\rho}u_\rho \qquad (15.7)$$

すべての粒子の時間を
tとして求める

また、Hamilton関数を求めてみる

Lagrange関数 $$L=\sum_{i=1}^{N}\left\{-m_i c^2\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{c\mathrm{d}t}\right)^2}+e_i\vec{A}(i)\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{\mathrm{d}t}+e_i c A_0(i)\right\}$$

$$p_k(i)=m_i\frac{\mathrm{d}z^k(i)}{\mathrm{d}t}\Big/\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(t)}{c\mathrm{d}t}\right)^2}+e_i A_k(i). \qquad (17.6)$$

同様にLに対応する$Hamilton$関数は、$H=p\cdot v-L$から

$$H=\sum_i \underbrace{\left\{c\sqrt{\{\vec{p}(i)-e_i\vec{A}(i)\}^2+(m_i c)^2}-e_i c A_0(i)\right\}}_{cp^0(i)}. \qquad (17.7)$$

{　}のなかはi番目の粒子のエネルギー

$$p^0(i) \overset{d}{\equiv} \frac{1}{c}\{\quad\} = \sqrt{\{\vec{p}(i) - e_i\vec{A}(i)\}^2 + (m_i c)^2} - e_i A_0(i)$$

$$\pi_k(i) \overset{d}{\equiv} p_k(i) - e_i A_k(i)$$ とすれば

$$\pi_k(i) = m_i \frac{\mathrm{d}z_k(i)}{\mathrm{d}t} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{c\mathrm{d}t}\right)^2} \quad (k=1, 2, 3) \quad (17.10)$$

点電荷が電磁場と相互作用している場合の$p_k(i)$と同じ

$$\pi_\mu(i) = p_\mu(i) - e_i A_\mu(i)$$

という関係が求まる

もし電磁場A_μが粒子自身から出た場合は

$$I=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\{-m_i c\sqrt{-\dot{z}_\mu(i)\dot{z}^\mu(i)}+e_i A_\mu(i)\dot{z}^\mu(i)\}\mathrm{d}\tau_i -\frac{1}{4\mu_0}\int f_{\mu\nu}(x)f^{\mu\nu}(x)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t \tag{17.11}$$

$$\Updownarrow$$

$$I=\int L(x)\mathrm{d}^4x$$

$$L(x)=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\{-m_i c\sqrt{-\dot{z}_\mu(i)\dot{z}^\mu(i)}+e_i A_\mu(x)\dot{z}^\mu(i)\}\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i -\frac{1}{4\mu_0 c}f_{\mu\nu}(x)f^{\mu\nu}(x). \tag{17.12}$$

ここでIを
$Z_\mu(i)$を汎関数として変分すると、運動方程式が求まる
$A_\mu(x)$をを汎関数として変分すると、Maxwell方程式が求まる

Maxwell方程式

Maxwell方程式を求めると

$$\frac{\partial L(x)}{\partial A_\mu(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial L(x)}{\partial A_{\mu,\nu}(x)}\right\} = 0, \qquad A_{\mu,\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\nu A_\mu$$

このL(x)に(17.12)を代入すると

$$\sum_{i=1}^{N} e_i \int \dot{z}^\mu(i)\delta^4\{x - z(i)\}\mathrm{d}\tau_i - \frac{1}{\mu_0 c}\partial_\nu f^{\mu\nu} = 0 \qquad (17.13)$$

ここで $j^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} c e_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\mu(i)\delta^4\{x - z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$ とすると

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu(x) \qquad (17.13)'$$

となりMaxwell方程式と一致する

また、$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$より(12.2)も成立

$J^{\mu}(x)$の証明

$$j^{\mu}(x) \stackrel{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^{\mu}(i)\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$ は電流密度なのか？

①連続の方程式に入れてみる

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} j^{\mu}(x) = \sum ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^{\mu}(i) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$

$$= -\sum ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\delta^4\{x-z(i)\}}{\partial z^{\mu}(i)} \frac{\mathrm{d}z^{\mu}(i)}{\mathrm{d}\tau_i}\mathrm{d}\tau_i$$

$$= -\sum ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_i}\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i.$$

$$\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = 0$$ で成立

②$J^0(x)/c$が電荷密度かを確かめる

$$\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} j^0(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{N} e_i \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3x \int_{-\infty}^{\infty} \delta^4\{x-z(i)\} \frac{\mathrm{d}z^0(\tau_i)}{\mathrm{d}\tau_i}\mathrm{d}\tau_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} e_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta^3\{x-z(i)\}\mathrm{d}^3x.$$

⇒ 全電荷となる

$J^{\mu}(x)$は電流密度

エネルギー運動量の保存則

(17.13)' から

$$\partial_\nu T^\nu{}_\rho(x)_{(e)} = f_{\rho\lambda} j^\lambda \qquad (17.15)$$

エネルギー運動量の保存則が導かれる

$T^\nu{}_\rho(x)_{(e)}$ は電磁場のエネルギー運動量テンソル

(17.15)と(17.14)をつかうと

$$f_{\rho\lambda}(x) j^\lambda(x) = \sum_{i=1}^{N} c \int \delta^4\{x - z(i)\} e_i f_{\rho\lambda}(i) \dot{z}^\lambda(i) \mathrm{d}\tau_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i c \int \dot{z}^\nu(i) \dot{z}_\rho(i) \delta^4\{x - z(i)\} \mathrm{d}\tau_i\right]}_{-T^\nu{}_\rho(x)_m}.$$

(17.15)は $\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^\nu{}_\rho = 0,\quad T^\nu{}_\rho \overset{d}{\equiv} \underbrace{T^\nu{}_{\rho(e)}}_{\text{電磁場エネルギー}} + \underbrace{T^\nu{}_{\rho(m)}}_{\text{荷電粒子エネルギー}} \qquad (17.18)$

この荷電粒子系のエネルギーテンソルを３次元空間にわたり積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_0(x)_{(m)} \mathrm{d}^3 x$$

$$= + \sum_{i=1}^{N} m_i c \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x \left[\delta\{\vec{x} - \vec{z}(i)\} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^0(i) \delta\{x^0 - z^0(i)\} \mathrm{d}z^0(i) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \{\beta(i)\}^2}}.$$

質点系の全エネルギーになる

(−c)×(質点系の運動量のk成分)は

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_k(x)_{(m)} \mathrm{d}^3 x = -c \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\sqrt{1 - \{\beta(i)\}^2}} \frac{\mathrm{d}z_k(i)}{\mathrm{d}t}$$

これをある瞬間、超平面で挟まれた領域（無限遠まで離して良い）にわたり４次元的に積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_\rho(\vec{x}, t_2) \mathrm{d}^3 x - \int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_\rho(\vec{x}, t_1) \mathrm{d}^3 x$$

$$= -\int_{ct_1}^{ct_2} \mathrm{d}x^0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x \sum_{k=1}^{3} \partial_k T^k{}_\rho(\vec{x}, t) = 0$$

よってJ_ρはtによらず一定値になる
これを全エネルギー、全運動量の保存則である

J_ρをLorentz変換してみると共変ベクトルになり、その値は

$$J_0 = \frac{1}{2}\int \{(\vec{E}\cdot\vec{D})+(\vec{B}\cdot\vec{H})\}\mathrm{d}^3x + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\{\beta(i)\}^2}},$$

$$J_k = -c\left[\frac{1}{c^2}\int (\vec{E}\times\vec{H})\mathrm{d}^3x + \sum_i \frac{m_i}{\sqrt{1-\{\beta(i)\}^2}}\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{\mathrm{d}t}\right]_k.$$

また、

$$T^\nu{}_\rho(x)_{(m)} \stackrel{d}{\equiv} -\sum_{i=1}^{N} m_i c\int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\nu(i)\dot{z}_\rho(i)\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$

を「すべての粒子がごく小さな領域に存在し、同じ速度で動いている」とき

$$T^{\mu\nu}(\vec{x},t)_{(m)} = -u^\mu(t)u^\nu(t)\sum_{i=1}^{N} m_i c\int \delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$ と書き直せる

$$\rho(x) \stackrel{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} m_i c\int \delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$ のとすれば$\rho(x)$はLorentz変換しても不変

そこで粒子が静止している系S’にすると $\rho(x) = \rho'(x') = \sum_{i=1}^{N} m_i \delta\{\vec{x}'-\vec{z}'(\tau_i=t')\}.$

となり、これは粒子の静止系からみた**質量密度**である

したがって

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)_{(m)} = -\rho(\vec{x}, t)u^{\mu}(t)u^{\nu}(t) \qquad (17.20)$$

となる

もし、粒子系をいくつかの部分集合に分けた場合、集合の中心の座標$\vec{x}$として

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)_{(m)} = -\rho(\vec{x}, t)u^{\mu}(\vec{x}, t)u^{\nu}(\vec{x}, t) \qquad (17.20)'$$

と表せられ

この場合

$$\partial_{\mu}\{\rho(x)u^{\mu}(x)\} = 0 \qquad (17.21)$$

の連続の式を満たす必要がある

(17.20)’の$\rho(x)$は時空点xの粒子に着目し、それらを瞬間的に静止系から見た質量密度を、一般の慣性系に置き換えたものである