相対論輪読 (6.25)

101104 mori

今日やること

- 前回習ったこと
  - ✓共変微分
  - ✓affine接続
  - ✓Cristoffel記号
  - ✓Riemann接続

- 今回習うこと
  - Riemannの曲率テンソル
  - Bianchiの恒等式
  - Ricciテンソル
  - (Einsteinテンソル)

共変微分は可換ではない

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha \neq \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha$$

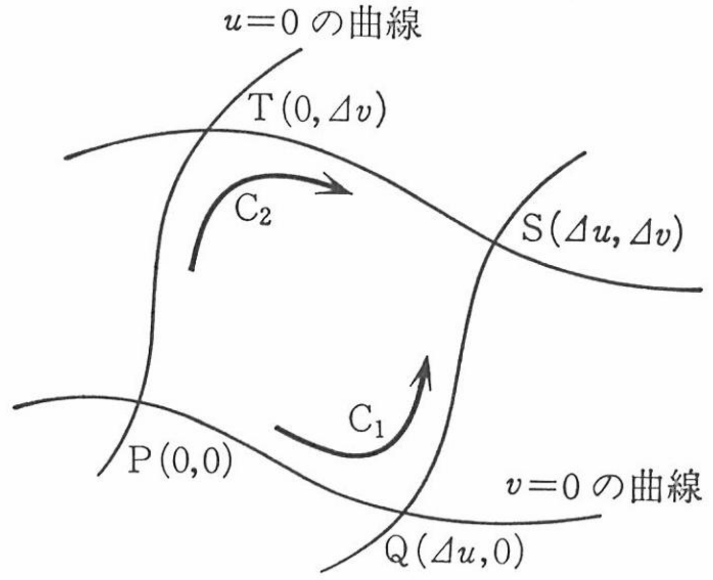

図 12

Riemann tensor

交換子：$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$ として

Riemann-Christoffelの曲率テンソル(Riemann tensor) Rを導入

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta$$

具体的に計算すると

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\tau} \Gamma^\tau{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\tau} \Gamma^\tau{}_{\mu\beta} \quad (25.2)$$

- １階反変３回共変
- 空間の歪み方を表す
  - 歪みがない ⇔ R=0

Riemann tensorの物理的意味

- ベクトルVをPからSまで平行移動させる
  - コース：C1とC2

$$V^\mu(S, C_1)_{//} - V^\mu(S, C_2)_{//} = -R^\mu{}_{\rho\alpha\beta} V^\rho \Delta_1 x^\alpha \Delta_2 x^\beta$$

$$= -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\rho\alpha\beta} V^\rho \Delta\sigma^{\alpha\beta} \quad (25.3)$$

微小面積を一周させた時のベクトルのずれ

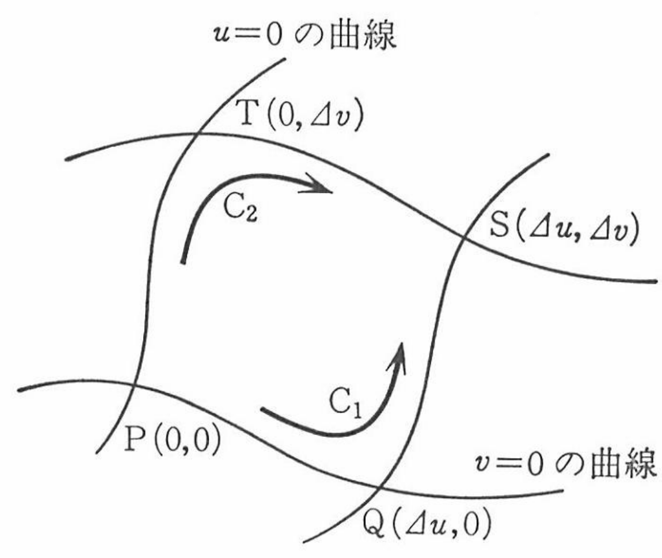

図 12

Rの対称性、自由度について

1. $(\alpha\beta)$ と$(\mu\nu)$の各組で、同じ数字があればR=0

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \qquad R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

-> $(\alpha\beta)$ と$(\mu\nu)$について(01), (02), (03), (12), (13), (23) の６通り

-> 6×6 の行列R_{AB}と同等 (36自由度)

2. R_{AB}は対称行列 $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$

-> 21自由度

3. $$R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\lambda} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} = 0 \qquad (25.5)$$

-> この式からは実は1自由度だけ落とせる

-> 全20自由度

Bianchiの恒等式の導出

$$\nabla_\lambda[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = \nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\cdot V^\beta + R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\cdot\nabla_\lambda V^\beta.$$

また少し面倒な計算をすると

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\lambda V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\cdot\nabla_\lambda V^\beta - R^\tau{}_{\lambda\mu\nu}\cdot\nabla_\tau V^\alpha$$

となる．そこで両者の差を求めると

$$[\nabla_\lambda, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]V^\alpha = \nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\cdot V^\beta + R^\tau{}_{\lambda\mu\nu}\cdot\nabla_\tau V^\alpha. \qquad (25.6)$$

λ, μ, ν を順々におきかえれば

$$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\lambda]]V^\alpha = \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}\cdot V^\beta + R^\tau{}_{\mu\nu\lambda}\cdot\nabla_\tau V^\alpha,$$

$$[\nabla_\nu, [\nabla_\lambda, \nabla_\mu]]V^\alpha = \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}\cdot V^\beta + R^\tau{}_{\nu\lambda\mu}\cdot\nabla_\tau V^\alpha.$$

これら 3 個の式を加えると左辺は Jacobi の恒等式のために 0 となる．したがって

= 0 :Bianchi identity

$$0 \equiv \boxed{(\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu})}\cdot V^\beta$$

$$+\boxed{(R^\tau{}_{\lambda\mu\nu} + R^\tau{}_{\mu\nu\lambda} + R^\tau{}_{\nu\lambda\mu})}\nabla_\tau V^\alpha.$$

= 0 :前頁(25.5)

Ricciテンソル

- Ricci テンソル:Rを縮約して得られる２階のテンソル

$$R_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} R^{\alpha}{}_{\nu\mu\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\tau}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}$$
$$= R_{\nu\mu}, \qquad (25.9)$$

  – 物理的意味：

- gを作用させて得られるスカラー：スカラー曲率

$$R \overset{d}{\equiv} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

  – 物理的意味：

Einsteinテンソル

- そのうち必要になるEinstein tensor (g)を導入

$$\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} \equiv 0, \tag{25.7}$$

(25.7) の α と ν を縮約すると

$$\nabla_\lambda R_{\beta\mu} - \nabla_\mu R_{\beta\lambda} + \nabla_\alpha R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} \equiv 0.$$

これに $g^{\lambda\beta}$ をかけ，$\nabla_\tau g^{\lambda\beta} = 0$ を思いおこすと

$$2\nabla_\lambda R^\lambda{}_\mu - \nabla_\mu R = 2\nabla_\lambda\left(R^\lambda{}_\mu - \frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\mu R\right) \equiv 0$$

となる．いま **Einstein のテンソル**

$$G_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{25.11}$$

を使うと上の恒等式は

$$\nabla_\lambda G^\lambda{}_\mu \equiv 0 \tag{25.12}$$

重要な定理( )

定理 1　$g_{\mu\nu}$ およびその1階，2階微係数から作られ，2階微係数については1次式であるスカラー S は

$$S(x) = c_1 R(x) + c_2$$

以外にはない．c_1, c_2 は任意の定数である．

定理 2　$g_{\mu\nu}$，$\partial_\rho g_{\mu\nu}$，$\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}$ の関数で，$g_{\mu\nu}$ の2階微係数の1次式であらわされる2階対称テンソル $T^{\mu\nu}$ のうち，恒等式

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \equiv 0$$

を満たすものは

$$T^{\mu\nu} = c_1 G^{\mu\nu} + c_2 g^{\mu\nu}$$

だけである．c_1, c_2 は任意の定数である．