相対論ゼミ(4.17)

20100902 森

今日やること

- それほど新しい内容はありません
  - 解析力学の復習＋今までの知識の整理だと思ってください

- 様々なケースで、以下の手順でごりごりと計算します
  - 作用I、Lagrangian Lを適当に定める
  - → 変分法により方程式を求める
  - → これまでに得られた結果と比較する
  - → ついでにエネルギーや運動量の保存則も導く

すごく簡単な導入

最小作用の原理

粒子は $I = \int L\mathrm{d}t$ を最小にする経路を通る

- I : 作用
- Lagrangian L= K(運動エネルギー)−U(ポテンシャルエネルギー)

  と取ればよい

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0$　　q: 座標　p: 運動量

- $H = \dot{q}_i p_i - L \quad (= K + U)$ よりHamiltonの正準方程式を得る

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

特殊相対論でのLagrangian

$$I_0 = -\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{m_i c\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}z^{\mu}(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\frac{\mathrm{d}z^{\nu}(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}}}}\mathrm{d}\lambda_i \qquad (17.1)$$

粒子iのLagrangian

- $z^{\mu}(i)$：粒子iの座標
- λ_i：粒子の軌道を追えるパラメータなら何でも可
  - 普通はτを使えばいいんじゃないでしょうか

簡単化：λ_iをτにして、更に全粒子を同じt系に乗せてしまう

$$I_0 = -\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} m_i c\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{c\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (17.1)'$$

特殊相対論でのLagrangian

- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ より

$$p_k(i) = \frac{\partial L_0}{\partial(\mathrm{d}z^k(i)/\mathrm{d}t)} = m_i \frac{\mathrm{d}z^k(i)}{\mathrm{d}t} \Big/ \sqrt{1-(\mathrm{d}\vec{z}(i)/c\mathrm{d}t)^2} \tag{17.2}$$

- $H = \dot{q}_i p_i - L$ より

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} c\sqrt{(m_i c)^2 + (\vec{p}(i))^2} \tag{17.3}$$

16章と一致

- Iが極値を取るという条件から、運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_i \mathrm{d}z^k(i)/\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(\mathrm{d}\vec{z}(i)/c\mathrm{d}t)^2}}\right) = 0$$

が導出される。

電磁場があるとき

(17.1)に電磁場Aを導入

$$I=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left\{-m_i c\sqrt{-\frac{\mathrm{d}z_\mu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\frac{\mathrm{d}z^\mu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}}+e_i A_\nu(i)\frac{\mathrm{d}z^\nu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\right\}}_{\text{粒子iのLagrangian } L(i)}\mathrm{d}\lambda_i \qquad (17.4)$$

- $L(i)$から運動方程式を導くためにごりごり計算
  - 面倒なのでやっぱりλ_iをτ_iに　→ $\mathrm{d}z^\mu(i)/\mathrm{d}\tau_i \overset{d}{\equiv} \dot{z}^\mu(i)$

$$\frac{\partial L(i)}{\partial z^\mu(i)}=e_i\frac{\mathrm{d}z^\nu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu(x)\right\}_{x=z(i)},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left\{\frac{\partial L(i)}{\partial(\mathrm{d}z^\mu(i)/\mathrm{d}\lambda_i)}\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left\{m_i c\frac{\mathrm{d}z_\mu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\Big/\underbrace{\sqrt{-\frac{\mathrm{d}z_\nu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}\frac{\mathrm{d}z^\nu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}}}_{\fallingdotseq c}\right\}+e_i\frac{\mathrm{d}A_\mu(i)}{\mathrm{d}\lambda_i}$$

$$\Rightarrow\quad m_i\frac{\mathrm{d}^2 z^\mu(i)}{\mathrm{d}\tau_i{}^2}=e_i f^{\mu\nu}(i)\dot{z}_\nu(i). \qquad (17.5)$$

：運動方程式(15.7)の再導出

Hamiltonian関数を求める

簡単のため

- やっぱりλ_iをtに(全粒子同じ時間)
- → $z^0(i) = ct$

Lagrangianは見やすくなって

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left\{ -m_i c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{c\mathrm{d}t} \right)^2} + e_i \vec{A}(i) \frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{\mathrm{d}t} + e_i c A_0(i) \right\}$$

- また $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ で計算すれば

$$p_k(i) = m_i \frac{\mathrm{d}z^k(i)}{\mathrm{d}t} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(t)}{c\mathrm{d}t} \right)^2} + e_i A_k(i). \qquad (17.6)$$

- 同様にして $H = \dot{q}_i p_i - L$ より

$$H = \sum_i \left\{ c \sqrt{\{\vec{p}(i) - e_i \vec{A}(i)\}^2 + (m_i c)^2} - e_i c A_0(i) \right\}. \qquad (17.7)$$

Hamiltonian関数を求める

よって粒子i の運動量は

$$p^0(i) \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{c}\{\quad\} = \sqrt{\{\vec{p}(i) - e_i\vec{A}(i)\}^2 + (m_i c)^2} - e_i A_0(i)$$

- $\pi_k(i) \stackrel{d}{\equiv} p_k(i) - e_i A_k(i)$ とおけば

$$\pi_k(i) = \underline{\underline{m_i \frac{\mathrm{d}z_k(i)}{\mathrm{d}t} \Big/ \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{c\mathrm{d}t}\right)^2}}} \quad (k=1,2,3) \quad (17.10)$$

電磁場がないときのpの形

- →π=p−eAに置き換えれば電磁場のある場合の関係式が得られる

荷電粒子自身の場も考えるとき

(17.4)に更に電磁場の作用積分を導入

$$I=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\{-m_i c\sqrt{-\dot{z}_\mu(i)\dot{z}^\mu(i)}+e_i A_\mu(i)\dot{z}^\mu(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$
$$\underline{\underline{-\frac{1}{4\mu_0}\int f_{\mu\nu}(x)f^{\mu\nu}(x)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}t}} \qquad (17.11)$$

或いは

$$I=\int L(x)\mathrm{d}^4x$$
$$L(x)=\sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\{-m_i c\sqrt{-\dot{z}_\mu(i)\dot{z}^\mu(i)}+e_i A_\mu(x)\dot{z}^\mu(i)\}\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$
$$-\frac{1}{4\mu_0 c}f_{\mu\nu}(x)f^{\mu\nu}(x). \qquad (17.12)$$

- z^μの汎関数とみなす → 粒子の運動方程式(17.5)
- A_μの汎関数とみなす → 電磁場のMaxwell方程式

Maxwell方程式の形

- Lagrange方程式 $\frac{\partial L(x)}{\partial A_\mu(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial L(x)}{\partial A_{\mu,\nu}(x)}\right\} = 0, \qquad A_{\mu,\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\nu A_\mu$
  を頑張って計算すると

$$\sum_{i=1}^{N} e_i \int \dot{z}^\mu(i)\delta^4\{x - z(i)\}\mathrm{d}\tau_i - \frac{1}{\mu_0 c}\partial_\nu f^{\mu\nu} = 0 \qquad (17.13)$$

- $j^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} c e_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\mu(i)\delta^4\{x - z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$とおけば

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu(x) \qquad (17.13)'$$

となり、Maxwell方程式(12,1)が再現される

- (12.2)の方は自動的に成立する、らしい

j^μについて

- $$j^\mu(x) \stackrel{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\mu(i)\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$ は本当に電流/電荷？
  - 連続の式を満たすことを確かめる

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu(x) = \sum ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\mu(i) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$

$$= -\sum ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\delta^4\{x-z(i)\}}{\partial z^\mu(i)} \frac{\mathrm{d}z^\mu(i)}{\mathrm{d}\tau_i}\mathrm{d}\tau_i$$

$$= -\sum ce_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_i}\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i. = 0$$

より $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ はOK

  - j^0/c が電荷密度になることを確かめる

$$\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} j^0(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{N} e_i \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x \int_{-\infty}^{\infty}\delta^4\{x-z(i)\}\frac{\mathrm{d}z^0(\tau_i)}{\mathrm{d}\tau_i}\mathrm{d}\tau_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} e_i \int_{-\infty}^{\infty}\delta^3\{x-z(i)\}\mathrm{d}^3x.$$

よりこれは全電荷になりOK

エネルギー・運動量保存則

- $\partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu(x)$（17. 13)′ から、12節同様にエネルギー運動量テンソルTが得られる。

$$\partial_\nu T^\nu{}_\rho(x)_{(e)} = f_{\rho\lambda} j^\lambda \qquad (17.15)$$

$$\begin{aligned}
f_{\rho\lambda}(x) j^\lambda(x) &= \sum_{i=1}^{N} c \int \delta^4\{x - z(i)\} e_i f_{\rho\lambda}(i) \dot{z}^\lambda(i) \mathrm{d}\tau_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} c m_i \int \frac{\mathrm{d}^2 z_\rho(i)}{\mathrm{d}\tau_i{}^2} \delta^4\{x - z(i)\} \mathrm{d}\tau_i \\
&= -\sum_{i=1}^{N} c m_i \int \frac{\mathrm{d}z_\rho(i)}{\mathrm{d}\tau_i} \frac{\partial}{\partial z^\nu(i)} \delta^4\{x - z(i)\} \frac{\mathrm{d}z^\nu(i)}{\mathrm{d}\tau_i} \mathrm{d}\tau_i \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big[\underline{\underline{\sum_{i=1}^{N} m_i c \int \dot{z}^\nu(i) \dot{z}_\rho(i) \delta^4\{x - z(i)\} \mathrm{d}\tau_i}} \Big].
\end{aligned}$$

$-T^\nu{}_\rho(x)_{(m)}$ とおく

エネルギー・運動量保存則

よって、(17.15) より

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} T^{\nu}{}_{\rho} = 0, \qquad T^{\nu}{}_{\rho} \overset{d}{\equiv} T^{\nu}{}_{\rho(e)} + T^{\nu}{}_{\rho(m)} \qquad (17.18)$$

電磁場　荷電粒子系

：全系のエネルギー・運動量の保存

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{0}{}_{0}(x)_{(m)} \mathrm{d}^3 x$$

$$= +\sum_{i=1}^{N} m_i c \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 x \left[\delta\{\vec{x} - \vec{z}(i)\} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^0(i) \delta\{x^0 - z^0(i)\} \mathrm{d}z^0(i) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \{\beta(i)\}^2}}.$$

：ある瞬間において$T^0{}_0$を全空間で積分すれば、確かに質点系の全エネルギーとなっている

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^{0}{}_{k}(x)_{(m)} \mathrm{d}^3 x = -c \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\sqrt{1 - \{\beta(i)\}^2}} \frac{\mathrm{d}z_k(i)}{\mathrm{d}t}$$

：同様に$T^0{}_k$が系の運動量のk成分になっている

エネルギー・運動量保存則

- $t=t_1$とt_2の間で全領域を積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_\rho(\vec{x}, t_2)\mathrm{d}^3x - \int_{-\infty}^{\infty} T^0{}_\rho(\vec{x}, t_1)\mathrm{d}^3x$$
$$= -\int_{ct_1}^{ct_2}\mathrm{d}x^0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\sum_{k=1}^{3}\partial_k T^k{}_\rho(\vec{x}, t) = 0$$

  - -> Tを全空間で積分したもの(J_ρ)はtによらず一定：全エネルギー・運動量保存則

  - J_ρの共変性などはまたいずれ扱うそうです。

$$J_0 = \frac{1}{2}\int\{(\vec{E}\cdot\vec{D})+(\vec{B}\cdot\vec{H})\}\mathrm{d}^3x + \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\{\beta(i)\}^2}},$$
$$J_k = -c\left[\frac{1}{c^2}\int(\vec{E}\times\vec{H})\mathrm{d}^3x + \sum_i \frac{m_i}{\sqrt{1-\{\beta(i)\}^2}}\frac{\mathrm{d}\vec{z}(i)}{\mathrm{d}t}\right]_k.$$

$$T^{\nu}{}_{\rho}(x)_{(m)} \stackrel{d}{\equiv} -\sum_{i=1}^{N} m_i c \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^{\nu}(i)\dot{z}_{\rho}(i)\delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i \quad (17.\ 17)$$

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)_{(m)} = -u^{\mu}(t)u^{\nu}(t)\sum_{i=1}^{N} m_i c \int \delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$$

：粒子一つの系

- $\delta^4\{x-z(i)\} = \delta^4\{x'-z'(i)\}$ なので、$\rho(x) \stackrel{d}{\equiv} \sum_{i=1}^{N} m_i c \int \delta^4\{x-z(i)\}\mathrm{d}\tau_i$ はLorentz変換に不変。
  - 粒子が静止している系では $\rho(x) = \rho'(x') = \sum_{i=1}^{N} m_i \delta\{\vec{x}'-\vec{z}'(\tau_i=t')\}$.

    ：静止系の質量密度
  - 物質の不滅則 $\partial_{\mu}\{\rho(x)u^{\mu}(x)\} = 0$ は、電荷の連続の式と全く同様にして証明可能。