相対論ゼミ(2.8-2.9)

20100729 森

今日やること

- 復習
- テンソルの計算(縮約・内積)
- 擬テンソル・テンソル密度

- 次回以降やること
  - 電磁気学・力学の書き換え
  - 今日までの話が大事！

Lorentz変換とは

- Lorentz変換とは？
  - 等速直線運動する2つの系(S, S′)間の座標変換
    - 4元距離一定(s^2=const.)から導く
    - 6自由度、連続群（4×4の行列）
  - 相対性原理の主張：物理法則はSとS′で同じ形式で書き表せる
- Minkowski 空間とは？
  - s^2=const.（Lorentz変換ができる空間）
    - Euclid空間(3次元距離一定)とのアナロジー

反変性・共変性

- 反変ベクトル
  - (線形)座標変換と同じ変換
    - 座標＝距離とか

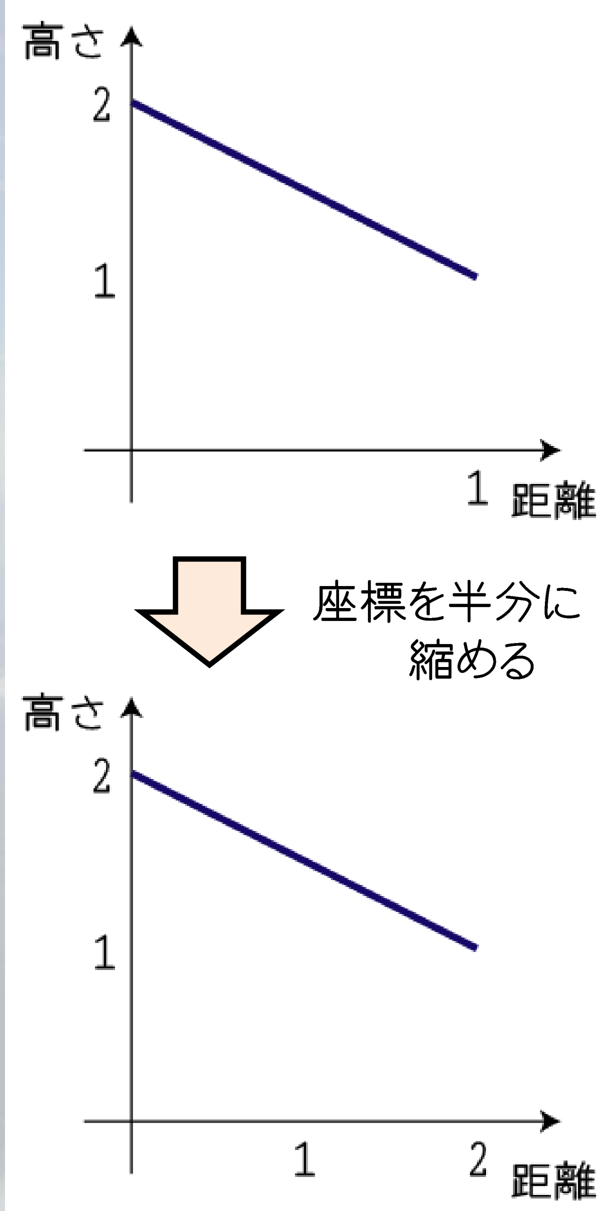
$$A = \frac{\partial x'}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} x' &= A\,x + B\,y + C\,z \\ y' &= D\,x + E\,y + F\,z \\ z' &= G\,x + H\,y + I\,z \end{aligned}$$

- 共変ベクトル
  - 偏微分を考えるときに必要
    - 電場とか

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial x}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

反変性・共変性



- １次元の例
  - 座標変換に伴い、
    - 距離：１→２　　　２倍
    - 傾き：１→0.5　　1/2倍

座標変換に対する変化が違う！

- 距離：反変的
- 傾き(電場とか)：共変的
- 共変ベクトルは上付き文字、反変ベクトルは下付き文字で区別することにする

テンソルの導入

$$C^{\mu\nu}(x) \stackrel{d}{=} A^{\mu}(x)B^{\nu}(x)$$

- 直積で、4×4の行列みたいなものができる。
  - (計算すれば)この行列の各成分は反変的に振舞うことが分かる -> 2階の反変テンソル
- 高階のテンソルも似たような形で定義可
- ベクトルはLorentz変換に対して線形
  - テンソルもLorentz変換に対して線形

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (a_i b_j) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

直積

ここまで復習

テンソルの等式、和、差

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) = B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$$

- AとBの4*4*4＝64個の成分が全部等しい
  - 全く同じ添字でなければならない
- 全く同じ変換規則を持つので、Lorentz変換しても等式は成立
- A, Bがテンソルならばその線形結合もテンソル
  - 和・差・線形結合はOK
- 異なる2点でのテンソルの和 $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) + B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(y)$ もテンソルだが、一般相対論の座標変換では許されていない
  - 和＝積分

テンソルの積

- 2つのテンソルの任意の成分の積(直積)として定義
  例 $C^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha\beta}(x) \stackrel{d}{\equiv} A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) B_{\alpha\beta}(x)$
  - Cもまたテンソル(5階)になる
  - Cは$4^3 \times 4^2$=1024個の成分を持つ

- テンソルの微分(例：$\dfrac{\partial A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)}{\partial x^{\rho}}$)もテンソル
  - 形式的には共変ベクトル $\partial_\rho = \partial / \partial x^\rho$ とAの積とみなせる
  - 微分記号は単独で意味のある量ではないが、変換性を考えると1個の共変ベクトル量とみなせる

縮約と内積

- 混合テンソルで、同じ添字が上下にある場合は和を取ってテンソルを2階下げることができる（Einstein記法）

$$B^{\nu}(x) \stackrel{d}{\equiv} A^{\lambda\nu}{}_{\lambda}(x)$$

  - この動作を縮約とか内積を求めると呼ぶ
  - 特に反変ベクトルと共変ベクトルから導かれるスカラーをスカラー積と呼ぶ

$$C(x) \stackrel{d}{\equiv} A^{\mu}(x)B_{\mu}(x)$$

    - スカラー積はLorentz変換に不変

$$(A')^{\mu}(B')_{\mu} = A^{\nu}\underbrace{\alpha^{\mu}_{\nu}\alpha^{\rho}_{\mu}}_{=\delta^{\rho}_{\nu}}B_{\rho} = A^{\mu}B_{\mu}$$

反変ベクトル⇔共変ベクトル

- $\eta_{\mu\nu}$と反変ベクトルの内積 -> 共変ベクトル

$$B_\nu(x) \stackrel{d}{\equiv} \eta_{\nu\mu} A^\mu(x)$$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - 逆もまた然り

- 同じ物理量を共変ベクトルとして扱うことも反変ベクトルとして扱うことも出来る
  - 共変量として扱うのが便利ならば$\eta_{\mu\nu}A^\nu$をA_μと書いて用いればよい
    - ν=0のときだけ$A^0=-A_0$となることに注意

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

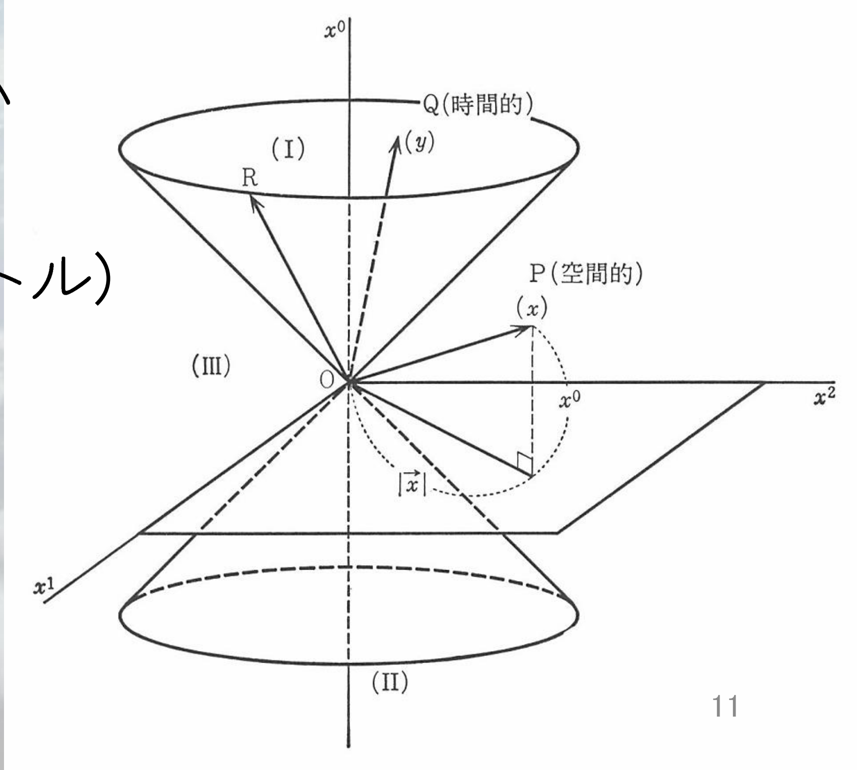
    - この辺が大事になってくるのは一般から？

光円錐・世界線

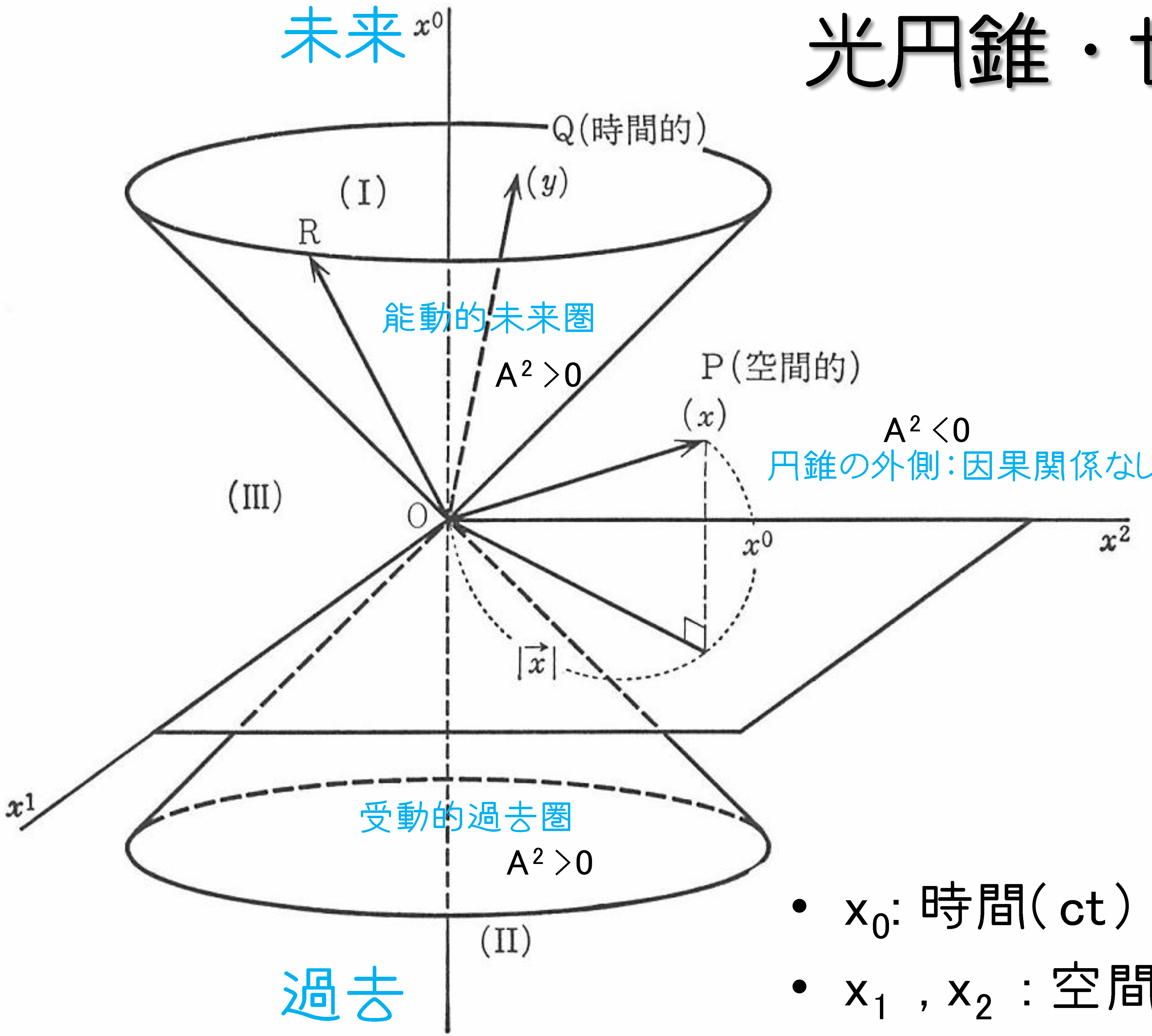
- 4元ベクトルの“長さ”A：自身とのスカラー積（内積）

$$(A)^2 \stackrel{d}{\equiv} A_\mu A^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = -(A^0)^2 + \sum_{k=1}^{3} (A^k)^2$$

- M nkowski 空間では負になったりする
  - 負：時間的ベクトル
    - 空間的相互作用を持てない
  - 正：空間的ベクトル
  - 零：ゼロベクトル(ヌルベクトル)
    - 光



光円錐・世界線



- x_0: 時間(ct)
- x_1 , x_2 : 空間

スカラー密度・擬スカラー

- ある量Ｓの4次元時空内積分

$$J \overset{d}{\equiv} \int_{\Omega} S(x)\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \overset{d}{\equiv} \int_{\Omega} S(x)\mathrm{d}^4x$$

がx’系に映って($S'(x')\mathrm{d}^4x' = S(x)\mathrm{d}^4x$)になるとき、

Ｓをスカラー密度と呼ぶ

  - 計算：

$$S'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}S(x) = \{\det(a^{\mu}{}_{\nu})\}^{-1}S(x)$$

$$= \pm S(x)\begin{cases} +: & \det(a^{\mu}{}_{\nu}) = +1 \text{ のとき} \\ -: & \det(a^{\mu}{}_{\nu}) = -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

- det=−1(空間反転）->S’=−S：スカラーじゃない！
  - 擬スカラー
- 同様に3階擬テンソルも紹介されてます(省略)
  - 空間反転(左手系→右手系)で符号が変わってしまう

スカラー密度とは何か

・スカラー密度 $J \stackrel{d}{\equiv} \int_\Omega S(x)\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \stackrel{d}{\equiv} \int_\Omega S(x)\mathrm{d}^4x$

・よくある座標変換：直交座標→球座標

$$\iiint f(x, y, z)dxdydz = \iiint f(r, \theta, \phi)r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

ヤコビアンがいる

スカラー密度：ヤコビアン部分を予め含んでる

とか書くと怪しい

スカラー密度の例

- 4階共変完全反対称テンソル$T_{\lambda\mu\nu\rho}$を考える
  - Tは完全反対称：偶置換は成分不変、奇置換は逆符号
  - 例： $T_{0123} \equiv T = -T_{1023}$ （奇置換）
    $= T_{2013}$ （偶置換）
    $T_{0023} = T_{0122} = 0$
    - 0でない成分は+Tと−Tしか持たない

- TはLorentz変換に対して $\boldsymbol{T}'(x') = \{\det(a^{\rho}{}_{\sigma})\}^{-1}\boldsymbol{T}(x)$
  - -> Tはスカラー密度

デュアルなテンソル密度

- $$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 1: & (\lambda\mu\nu\rho)\rightarrow(0123)\text{ が偶置換のとき} \\ -1: & (\lambda\mu\nu\rho)\rightarrow(0123)\text{ が奇置換のとき} \\ 0: & \text{その他の場合.} \end{cases}$$ を定義
  - 4階反変完全反対称テンソル密度になる
  - $\boldsymbol{T}(x) = \frac{1}{4!}\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}T_{\lambda\mu\nu\rho}(x)$ = {12*(−1)*(−T)+12*1*T}/24
    - スカラー密度が作れた！
  - Eを用いればテンソルからテンソル密度が作れる
    - Eで変換されるテンソル密度を、元のテンソルにデュアルなテンソル密度と呼ぶ
      - 共変微分界隈の扱いが簡単になる