相対論ゼミ第５回 2010/8/18

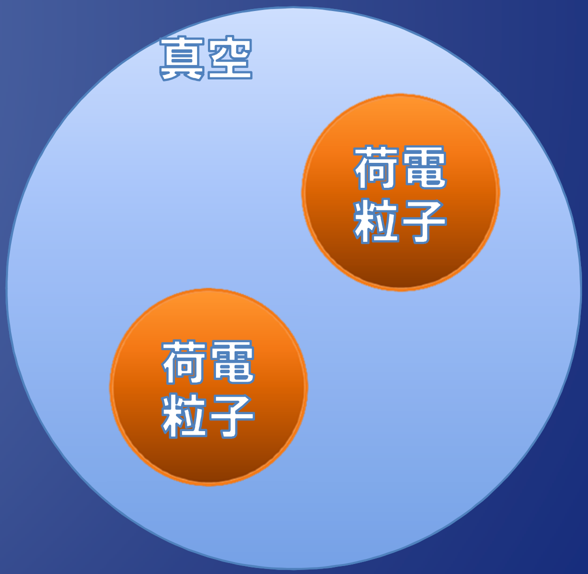
第Ⅲ章　相対論的電磁気学

13 現象論的電気力学の相対論的書きかえ

本間　彰

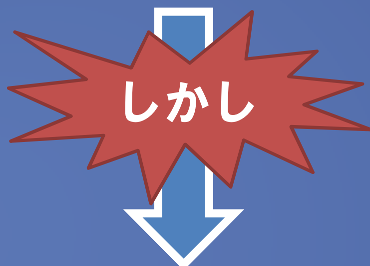
現象論的電磁気学

- 荷電粒子
  - 真空の空間を挟んで散在
  - 電媒質、磁性体内の電気力学→相対論的に書きかえ可能

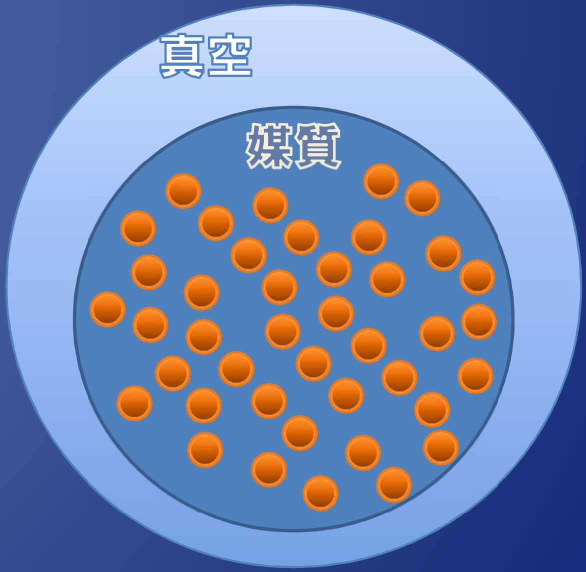


現象論的電磁気学

- 荷電粒子
  - 真空の空間を挟んで散在
  - 電媒質、磁性体内の電気力学→相対論的に書きかえ可能



- 現実には・・・
  - 媒質を構成する荷電粒子の数は無数
  - 個々の運動を考慮するのは不可能



現象論的立場で
電磁場の方程式を再考することは有意義

電磁場の方程式の相対論的書きかえ

- 慣性系S'から眺めたとき媒質は静止
  - 今まで通りのMaxwell方程式が成り立つ

$$\mathrm{div}'\vec{B}' = 0, \qquad \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + \mathrm{rot}'\vec{E}' = 0 \qquad (13.1\mathrm{a})$$

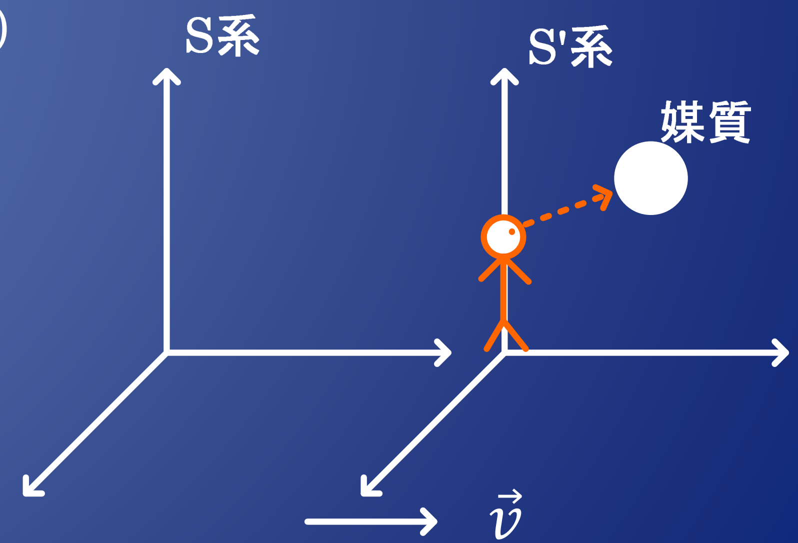
$$\mathrm{div}'\vec{D}' = \rho', \qquad \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} - \mathrm{rot}'\vec{H}' = -\vec{j}' \qquad (13.1\mathrm{b})$$

  - 媒質内の位置の関数も成り立つ

$$\vec{D}' = \varepsilon\vec{E}', \qquad \vec{H}' = \mu^{-1}\vec{B}' \qquad (13.2)$$

  - Ohmの法則も成り立つ

$$\vec{j}' = \sigma\vec{E}' \qquad (13.3)$$



電磁場の方程式の相対論的書きかえ

- 慣性系S'から眺めたとき媒質は静止
  - 今まで通りのMaxwell方程式が成り立つ

$$\mathrm{div}'\vec{B}' = 0, \qquad \frac{\partial \vec{B}'}{\partial \vec{t}'} + \mathrm{rot}'\vec{E}' = 0 \qquad (13.1\mathrm{a})$$

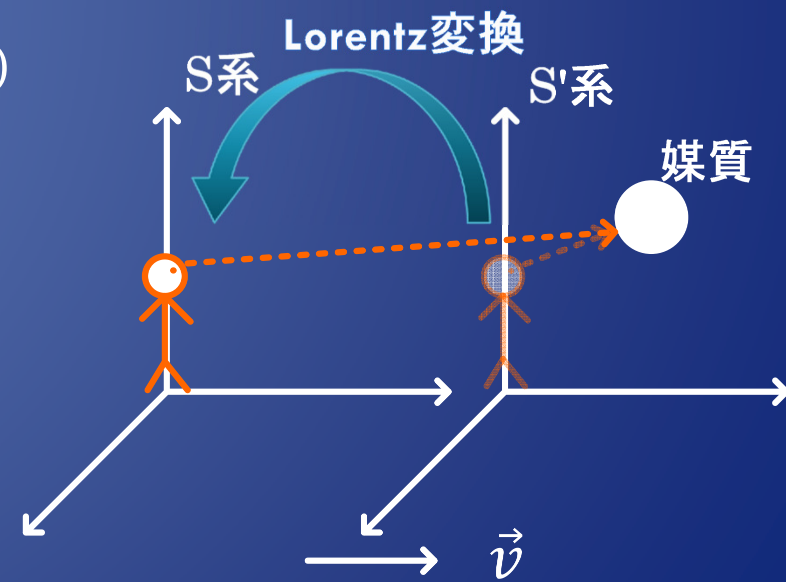
$$\mathrm{div}'\vec{D}' = \rho', \qquad \frac{\partial \vec{D}'}{\partial \vec{t}'} - \mathrm{rot}'\vec{H}' = -\vec{j}' \qquad (13.1\mathrm{b})$$

  - 媒質内の位置の関数も成り立つ

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}', \qquad \vec{H}' = \mu^{-1}\vec{B}' \qquad (13.2)$$

  - Ohmの法則も成り立つ

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}' \qquad (13.3)$$



Lorentz変換$S' \to S$を適用

運動している媒質中の
現象論的電磁場の法則が導かれる

Maxwell方程式のLorentz変換

- Maxwell方程式をテンソル形式に書き換える
  - $\vec{B}', \vec{E}'$について
    - 反対称テンソル$f'_{\mu\nu} = -f'_{\mu\nu}$を定義
    - $\vec{B}' = \left(f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}\right) = \left(B'_x, B'_y, B'_z\right)$
    - $\frac{1}{c}\vec{E}' = \left(f'_{10}, f'_{20}, f'_{30}\right) = \left(E'_x, E'_y, E'_z\right)$

$$f'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f'_{00} & f'_{01} & f'_{02} & f'_{03} \\ f'_{10} & f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} \\ f'_{20} & f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} \\ f'_{30} & f'_{31} & f'_{32} & f'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E'_x & -\frac{1}{c}E'_y & -\frac{1}{c}E'_z \\ \frac{1}{c}E'_x & 0 & B'_z & -B'_y \\ \frac{1}{c}E'_y & -B'_z & 0 & B'_x \\ \frac{1}{c}E'_z & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix}$$

  - $\vec{D}', \vec{H}'$について
    - 別の反対称テンソル$F^{\mu\nu\prime} = -F^{\nu\mu\prime}$を用意
    - $\vec{H}' = (F^{23\prime}, F^{31\prime}, F^{12\prime}) = \left(H'_x, H'_y, H'_z\right)$
    - $c\vec{D}' = (F^{01\prime}, F^{02\prime}, F^{03\prime}) = \left(D'_x, D'_y, D'_z\right)$

$$F^{\mu\nu}{}' = \begin{pmatrix} 0 & cD'_x & cD'_y & cD'_z \\ -cD'_x & 0 & H'_z & -H'_y \\ -cD'_y & -H'_z & 0 & H'_x \\ -cD'_z & H'_y & -H'_x & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell方程式のLorentz変換

- 四元電流
  - $c\rho' = j^{0\prime},\ \vec{j}' = (j^{1\prime}, j^{2\prime}, j^{3\prime})$
  - を用いることでMaxwell方程式は…

$$\partial'_\lambda f'_{\mu\nu} + \partial'_\mu f'_{\nu\lambda} + \partial'_\nu f'_{\lambda\mu} = 0 \qquad (13.7\mathrm{a})$$

$$\partial'_\lambda F^{\mu\lambda\prime} = j^{\mu\prime} \qquad (13.7\mathrm{b})$$

- これはいずれもテンソル形式

  ⇒ どんな慣性系から見ても同じ形式が成立

S系

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0$$

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = j^\mu$$

媒質内の位置関数の書きかえ

- $(\vec{D}', \vec{H}')$と$(\vec{E}', \vec{B}')$の間に成り立つ式の書きかえ

$$\vec{D}' = \varepsilon \vec{E}', \qquad \vec{H}' = \mu^{-1} \vec{B}' \qquad (13.2)$$

- $(\vec{B}', \vec{E}', \vec{H}', \vec{D}')$と$S$系からみた対応する量との変換則を考える
  - $f_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}$が反対称テンソルなので

$$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} = \vec{E}^*{}_{//}, \qquad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}^*{}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13.9a)$$

$$\vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\{\vec{B} - (\vec{v} \times \vec{E})/c^2\}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13.9b)$$

$$\vec{D}'_{//} = \vec{D}_{//}, \qquad \vec{D}'_{\perp} = \frac{\{\vec{D} + (\vec{v} \times \vec{H})/c^2\}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13.9c)$$

$$\vec{H}'_{//} = \vec{H}_{//} = \vec{H}^*{}_{//}, \qquad \vec{H}'_{\perp} = \frac{\vec{H}^*{}_{\perp}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13.9d)$$

- $//$: $\vec{v}$に平行
- $\perp$: $\vec{v}$に垂直
- $\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$
- $\vec{H}^* = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}$

- これを(13.2)やOhmの法則に代入（S'系からS系の量に翻訳）

  ⇒ 運動系へ拡張出来る

媒質内の位置関数の書きかえ(テンソル)

- S'とSの間のLorentz変換　$x^{\mu'} = a^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$　$(x^{\nu} = b^{\nu}{}_{\mu}x^{\mu})$
  - bとaの関係は

$$b^{\nu}{}_{\mu} = a_{\mu}{}^{\nu},\quad a^{\mu}{}_{\nu}b^{\nu}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho},\quad b^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu}{}_{\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho}$$

$$F^{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{3}(b^{\mu}{}_{0}b^{\nu}{}_{k} - b^{\mu}{}_{k}b^{\nu}{}_{0})F^{0k'} + \sum_{k,l=1}^{3} b^{\mu}{}_{k}b^{\nu}{}_{l}F^{kl\prime} \quad (13.10)$$

- $\vec{D}' = \varepsilon\vec{E}', \vec{H}' = \mu^{-1}\vec{B}'$(13.2)をテンソル成分を使ってかくと

$$F^{0k\prime} = \varepsilon c^{2} f^{0k\prime}, \qquad F^{kl\prime} = \mu^{-1} f^{kl\prime} \quad (k, l = 1,2,3) \quad (13.2')$$

- (13.2)を(13.10)に代入し、$f^{\mu\nu\prime}$をS系の量で書き表す

媒質内の位置関数の書きかえ(テンソル)

- (13.2)を(13.10)に代入し、$f^{\mu\nu\prime}$をS系の量で書き表す
  - 次の計算法を用いる

$$\sum_{k=1}^{3} b^{\nu}{}_{k} a^{k}{}_{\sigma} = \sum_{\lambda=0}^{3} b^{\nu}{}_{\lambda} a^{\lambda}{}_{0} - b^{\nu}{}_{0} a^{0}{}_{\sigma} = \delta^{\nu}{}_{\sigma} - b^{\nu}{}_{0} b_{\sigma}{}^{0}$$

  - $b^{\nu}{}_{0}$を次のように表す

$$b^{k}{}_{0} = \frac{v^k}{c\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{u^k}{c}, \qquad b^{0}{}_{0} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{u^0}{c} \qquad (13.11)$$

$$\eta_{00} = \eta_{\mu\nu} b^{\mu}{}_{0} b^{\nu}{}_{0} = \frac{\{-c^2 + (\vec{v})^2\}}{\left(\frac{dx^{0\prime}}{dt}\right)^2}$$

S'の空間座標原点をS'およびS系から眺めた場合

$$x^{\mu\prime} = \left(x^{0\prime}, \vec{x}' = 0\right), \quad x^{\mu} = \left(x^0 = ct, \vec{x}(t)\right) \ \Rightarrow \ x^{\mu} = b^{\mu}{}_{0} x^{0\prime}$$

これをtで微分すると$k = 1,2,3$に対して

$$v^k = \frac{dx^k}{dt} = b^{k}{}_{0} \frac{dx^{0\prime}}{dt}, \qquad c = \frac{dx^0}{dt} = b^{0}{}_{0} \frac{dx^{0\prime}}{dt}$$

媒質内の位置関数の書きかえ(テンソル)

$$\sum_{k=1}^{3} b^{\nu}{}_{k} a^{k}{}_{\sigma} = \sum_{\lambda=0}^{3} b^{\nu}{}_{\lambda} a^{\lambda}{}_{0} - b^{\nu}{}_{0} a^{0}{}_{\sigma} = \delta^{\nu}{}_{\sigma} - b^{\nu}{}_{0} b_{\sigma}{}^{0}$$

$$b^{k}{}_{0} = \frac{v^{k}}{c\sqrt{1-\beta^{2}}} \equiv \frac{u^{k}}{c}, \qquad b^{0}{}_{0} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^{2}}} \equiv \frac{u^{0}}{c}$$

- を使って(13.10)を書きかえる

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\left\{f^{\mu\nu} + (\varepsilon\mu - c^{-2})(\delta^{\mu}{}_{\sigma} u^{\nu} - \delta^{\mu}{}_{\sigma} \boxed{u^{\mu}})\boxed{u_{\rho}} f^{\rho\sigma}\right\} \quad (13.12)$$

４元速度
（反変ベクトル）

$u_{\rho} = \eta_{\rho\mu} u^{\mu}$
（共変ベクトル）

- (13.12)はテンソル式だからいかなる座標系から見ても成立

媒質内の位置関数の書きかえ(テンソル)

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\left\{f^{\mu\nu} + (\varepsilon\mu - c^{-2})(\delta^{\mu}{}_{\sigma}u^{\nu} - \delta^{\mu}{}_{\sigma}u^{\mu})u_{\rho}f^{\rho\sigma}\right\} \quad (13.12)$$

- 特に$u^0 = c,\quad u^k = 0\quad (k = 1,2,3)$とすると$\vec{v} = 0$に相当
  - S'系$(= S$ 系$)$に基準をとった場合になる

- 実際問題を扱う際に便利な3次元ベクトル記号で書き表す

$$\vec{D} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[\varepsilon\left(1 - \frac{\beta^2}{\varepsilon\mu c^2}\right)\vec{E} - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu c^2}\right)\left\{\frac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{E}) - \vec{v}\times\vec{B}\right\}\right]$$

$$\vec{H} = \frac{1}{1-\beta^2}\left[\frac{1}{\mu}(1 - \varepsilon\mu c^2\beta^2)\vec{B} - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu c^2}\right)\left\{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{B}) - \vec{v}\times\vec{E}\right\}\right]$$

(13.13)

Ohmの法則の書きかえ(テンソル形式)

- Ohmの法則$\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$(13.3)も同様にテンソル形式で書き表せる
  - S系から見た4元電流j^{μ}をS'系の量で表す
  - $j^{k\prime}\ (k = 1,2,3)$が(13.3)によって$j^{k\prime} = c\sigma f^{0k\prime}$と書き表せる
  - 前と同じ計算法を用いて

$$j^{\mu} = -c^2 u^{\mu} u_{\nu} j^{\nu} + \sigma u_{\rho} f^{\mu\rho} \qquad (13.14)$$

$$(\delta^{\mu}{}_{\nu} + c^{-2} u^{\mu} u_{\nu}) j^{\mu} = \sigma f^{\mu\rho} u_{\rho} \qquad (13.14)'$$

  - これを3次元ベクトル記号を使ってかく

$$\vec{j} = \vec{j}_{cond} + \vec{j}_{conv} \qquad (13.15)$$

$$\vec{j}_{cond} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\beta^2}} \left\{ \vec{E}^{*} - c^{-2} \vec{v} \left(\vec{v} \cdot \vec{E}^{*} \right) \right\} \qquad (13.16)$$

$$\vec{j}_{conv} = \rho \vec{v} \qquad (13.17)$$

S系からみたOhmの法則

電荷ρが媒質とともに速さ$\vec{v}$で移動することでの運搬電流

媒質境界面での境界条件の書きかえ

- 異なる媒質の境界面における境界条件
  - Maxwell方程式を解くにあたって必要
  - ① 2つの媒質が接着したまま移動したときの接触面での電磁場
  - ② 1つの物質の表面における境界条件
  - 求め方

方法① S'系から見た境界条件を考える

⇒S'系の境界条件にLorentz変換$S' \rightarrow S$を適用する

方法② S'系の電磁場の方程式を導いた処方をS系で行う

媒質境界面での境界条件の書きかえ①

- 静止系S'からみた境界条件
  - $(\vec{B}')_n, (\vec{E}')_t, (\vec{H}')_t$は境界面上で連続
  - $\{\vec{D}'(1)\}_n - \{\vec{D}'(2)\}_n = \omega'$

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{B}')_n, (\vec{E}')_t, (\vec{H}')_t \text{は境界面上で連続} \\ \{\vec{D}'(1)\}_n - \{\vec{D}'(2)\}_n = \omega' \end{array}\right\} \quad (13.18)$$

n:境界面の法線
t:接平面への物理量の射影
$\vec{n}$は媒質2から媒質1の方向を向く
ω':境界面上における電荷の面積密度

- (13.18)にLorentz変換を適用したい

物質が速度$\vec{v}$で走っている場合の条件が求まる

非常に面倒

媒質境界面での境界条件の書きかえ①

- (13.18)のLorentz変換
  - 例えば・・・
    - S'はS系のx軸の正の向きにvで走る
    - $S \to S'$が特殊Lorentz変換

    であるとする

(13.18)

$(\vec{B}')_n, (\vec{E}')_t, (\vec{H}')_t$は境界面上で連続

$\{\vec{D}'(1)\}_n - \{\vec{D}'(2)\}_n = \omega'$

  - 境界面上の点Pから隣接した点Qに向かう3次元ベクトル$\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$には
    - $a_x = a'_x\sqrt{1-\beta^2},\ a_y = a'_y,\ a_z = a'_z$
    - あるいは$a_{//} = a'_{//}\sqrt{1-\beta^2},\ \vec{a}_\perp = \vec{a}'_\perp$

    という関係がある
  - 点Pにおける単位法線ベクトル$\vec{n}$の成分間には$(\vec{a}\cdot\vec{n}) = (\vec{a}'\cdot\vec{n}') = 0$
    - $\lambda\sqrt{1-\beta^2}n_{//} = n'_{//},\ \ \lambda\vec{n}_\perp = \vec{n}_\perp$

    が成立する

$$\lambda^2\left\{(1-\beta^2)\left(n_{//}\right)^2 + (\vec{n}_\perp)^2\right\} = 1$$

$$\lambda^2\left\{(1-\beta^2)\left(n_{//}\right)^2\right\} = 1$$

媒質境界面での境界条件の書きかえ①

- $\lambda\sqrt{1-\beta^2}n_{//}=n'_{//},\ \ \lambda\vec{n}_{\perp}=\vec{n}_{\perp}$を使って
  - $\vec{E}'_t$が境界面の両側で値が等しいということをS系の量で表す

$$(\vec{E}'_t)_{//}=\lambda^2(\vec{E}^*{}_t)_{//}$$

$$\vec{E}^*{}_t=\vec{E}^*-\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{E}^*)$$

$$(\vec{E}'_t)_{\perp}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\{(\vec{E}^*{}_t)_{\perp}+\lambda^2 n_{//}\beta^2(\vec{E}^*{}_t)_{//}\vec{n}_{\perp}\}$$

  - $\vec{E}'_t$が境界面で連続

S系では$\vec{E}^*{}_t$が境界で連続である!

同様に$\vec{H}^*{}_t$も境界で連続である!

疑問

物質と真空が境を接している場合

・・・真空側の$\vec{E}^*{}_t,\vec{H}^*{}_t$の定義中の$\vec{v}$って何の速さ?

真空側でも$\vec{E}^*{}_t,\vec{H}^*{}_t$中の$\vec{v}$は物質の$\vec{v}$を用いる!

媒質境界面での境界条件の書きかえ②

- (13.18)とは…
  - S'系から見たMaxwell方程式を境界面の近所で積分して導いた

(13.18)

$(\vec{B}')_n, (\vec{E}')_t, (\vec{H}')_t$は境界面上で連続

$\{\vec{D}'(1)\}_n - \{\vec{D}'(2)\}_n = \omega'$

  - 同じ手法をS系で行うことでS系からみた境界条件が求まる

注意

S系から見た微小時間⊿tが経過 → 境界面が$\vec{v}$⊿tだけ移動

媒質境界面での境界条件の書きかえ②

- 便利な形式にS系の方程式を書きかえる

$$\mathrm{div}\vec{B}=0,\quad \frac{\delta\vec{B}}{\delta\vec{t}}+\mathrm{rot}\vec{E}^*=0 \qquad (13.21\mathrm{a})$$

$$\mathrm{div}\vec{D}=\rho,\quad \frac{\delta\vec{D}}{\delta\vec{t}}-\mathrm{rot}\vec{H}^*=-\vec{j}_{\mathrm{cond}} \qquad (13.21\mathrm{b})$$

$$\frac{\delta\vec{D}}{\delta t}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\mathrm{rot}\left(\vec{v}\times\vec{D}\right)+(\mathrm{div}\vec{D})\vec{v}$$

$$\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mathrm{rot}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)+(\mathrm{div}\vec{B})\vec{v}$$

$$\vec{j}_{\mathrm{cond}}\equiv\vec{j}-\vec{v}(\mathrm{div}\vec{D})$$

$$\vec{E}^*=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{H}^*=\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D}$$

- なお、$\vec{E}^*$は媒質に固定された単位電荷に働く(Sからみた)力
- $\vec{H}^*$についても似た感じ

媒質境界面での境界条件の書きかえ②

- $\frac{\delta}{\delta \vec{t}}$はある量$\vec{A}(\vec{x},t)$の曲面$\sigma$上の面積積分に対して

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\int_{\sigma(t+\Delta t)} \vec{A}(\vec{x}+\vec{v}\Delta t, t+\Delta t)\mathrm{d}\,\vec{\sigma}(t+\Delta t) - \int_{\sigma(t)} \vec{A}(\vec{x},t)\mathrm{d}\vec{\sigma}(t)\right\} = \frac{\delta \vec{A}(\vec{x},t)}{\delta t}$$

  - $\sigma(t), \sigma(t+\Delta t)$はそれぞれの時刻における曲面
  - $\mathrm{d}\vec{\sigma}(t), \mathrm{d}\vec{\sigma}(t+\Delta t)$それぞれの時刻における曲面の面積素片
  - $\vec{v}$が面上の点ごとに異なっていい⇒ $\vec{v}$は$\vec{x}$の関数と仮定してよい

媒質境界面での境界条件の書きかえ②

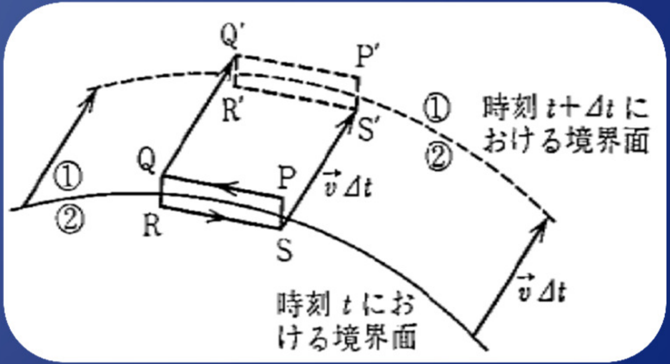
- 瞬間tに媒質1,2の境界面を垂直に切る矩形面を考える
  - 面積素片を示すベクトルを$\mathrm{d}\vec{\sigma}(t)$（向きは画面の奥から手前）
  - $\dfrac{\delta \vec{B}}{\delta \vec{t}} + \mathrm{rot}\vec{E}^* = 0$を矩形面内で積分
  - さらに時間についてtから$t + \varDelta t$まで積分

$$\varDelta t \iint \mathrm{rot}\,\vec{E}^* \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}(t) + \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}(t + \varDelta t) - \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma}(t) = 0$$

  - Stokesの定理より矩形のまわりの一周積分に書きかえ
  - QをR、PをSに一致させると$\vec{B}_t$が境界面上で有限なら第2、第3項は0

$$\vec{E}^*{}_t(1) = \vec{E}^*{}_t(2)$$

  - $\vec{H}^*{}_t$の連続性も同じ方法で導ける



媒質境界面での境界条件の書きかえ②

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \quad \frac{\delta \vec{B}}{\delta \vec{t}} + \mathrm{rot}\vec{E}^{*} = 0 \qquad (13.21\mathrm{a})$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho, \quad \frac{\delta \vec{D}}{\delta \vec{t}} - \mathrm{rot}\vec{H}^{*} = -\vec{j}_{\mathrm{cond}} \qquad (13.21\mathrm{b})$$

- 上式の第1式には時間の微分は出てこない
  - B_n, D_nの連続性を調べるときにはある瞬間に限っていい
  - 媒質が静止している場合と同じ議論が成り立つ

$$D_n(1) - D_n(2) = \omega$$