相対論ゼミ第三回

2-8　テンソルの等式、和、差、積と縮約
2-9　反対称テンソル、テンソル密度、
デュアル・テンソル

本間　彰

８　テンソルの等式、和、積と縮約

テンソルの等式

- ３階混合テンソル場$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x), B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) = B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$$

全く同じタイプ
同じ添字の組を持つ成分

- 全く同じ変換規則を持つ
  ⇒ *Lorentz*変換しても等式は成立

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) - B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) = 0$$

- あるテンソルが**0**…すべての成分が**0**

8　テンソルの等式、和、積と縮約

- テンソルの和

$$S^{\mu\nu}{}_{\lambda} \equiv A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) + B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$$

- テンソルの差

$$S^{\mu\nu}{}_{\lambda} \equiv A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) - B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$$

A, Bは全く同じ種類のテンソル
同じ添字の組を持つ成分についての和と差

8　テンソルの等式、和、積と縮約

- 異なる2点x, yでのテンソル成分の和

$$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x) + B^{\mu\nu}{}_{\lambda}(y)$$

  - A, Bと同じタイプのテンソル
  - テンソル場の成分をxについて微分、積分

    ⇒ 数学的に意味がある演算

ただし…

  - 一般相対論の座標変換では許されない！

8　テンソルの等式、和、積と縮約

- テンソルの積

$$C^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha\beta}(x) \equiv A^{\mu\nu}{}_{\lambda}\,(x) B_{\alpha\beta}(x)$$

  - Cは５階混合テンソルになる
  - テンソル積という演算で高階のテンソルを作れる

- テンソルの微分
  - $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$の微分… $\boxed{\dfrac{\partial A^{\mu\nu}{}_{\lambda}}{\partial x^{\rho}}}$ は4階混合テンソル
  - 形式的には共変ベクトル$\partial_{\rho} = \partial/\partial^{\rho}$と$A^{\mu\nu}{}_{\lambda}$の積
  - 微分記号自身はその変換性から
1個の共変ベクトル量とみなしていい

8　テンソルの等式、和、積と縮約

- テンソルの縮約（内積を求める）

$$B^{\nu}(x) \equiv A^{\lambda\nu}{}_{\lambda}\,(x), C^{\mu}(x) \equiv A^{\mu\lambda}{}_{\lambda}\,(x)$$

  - 上下一対の添字を等しくする
  - 0から3までの和をとる

$$\Downarrow$$

  - もとのテンソルより2階低いテンソルが求まる

- スカラー積

$$C(x) \equiv A^{\mu}(x)B_{\mu}(x)$$

  - 内積を求める操作のうちの一つ
  - 反変ベクトルと共変ベクトルから
    導かれるスカラー

8　テンソルの等式、和、積と縮約

- 反変ベクトルと共変ベクトルの変換
  - 反変ベクトル$A^\mu(x)$と共変テンソル$\eta_{\nu\mu}$の内積

$$B_\nu(x) \equiv \eta_{\nu\mu} A^\mu(x)$$

  - 共変ベクトル$B_\nu(x)$が求まる
  - 逆にB_νと$\eta^{\mu\nu}$の内積から

$$\eta^{\mu\nu} B_\nu = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda} A^\lambda = \delta^\mu{}_\lambda A^\lambda = A^\mu$$

  - 反変ベクトルA^μが求まる

$\mu = 1,2,3$の時は$A_\mu = A^\mu$だが
$\mu = 0$の時だけ$A_0 = -A^0$となることに注意

8　テンソルの等式、和、積と縮約

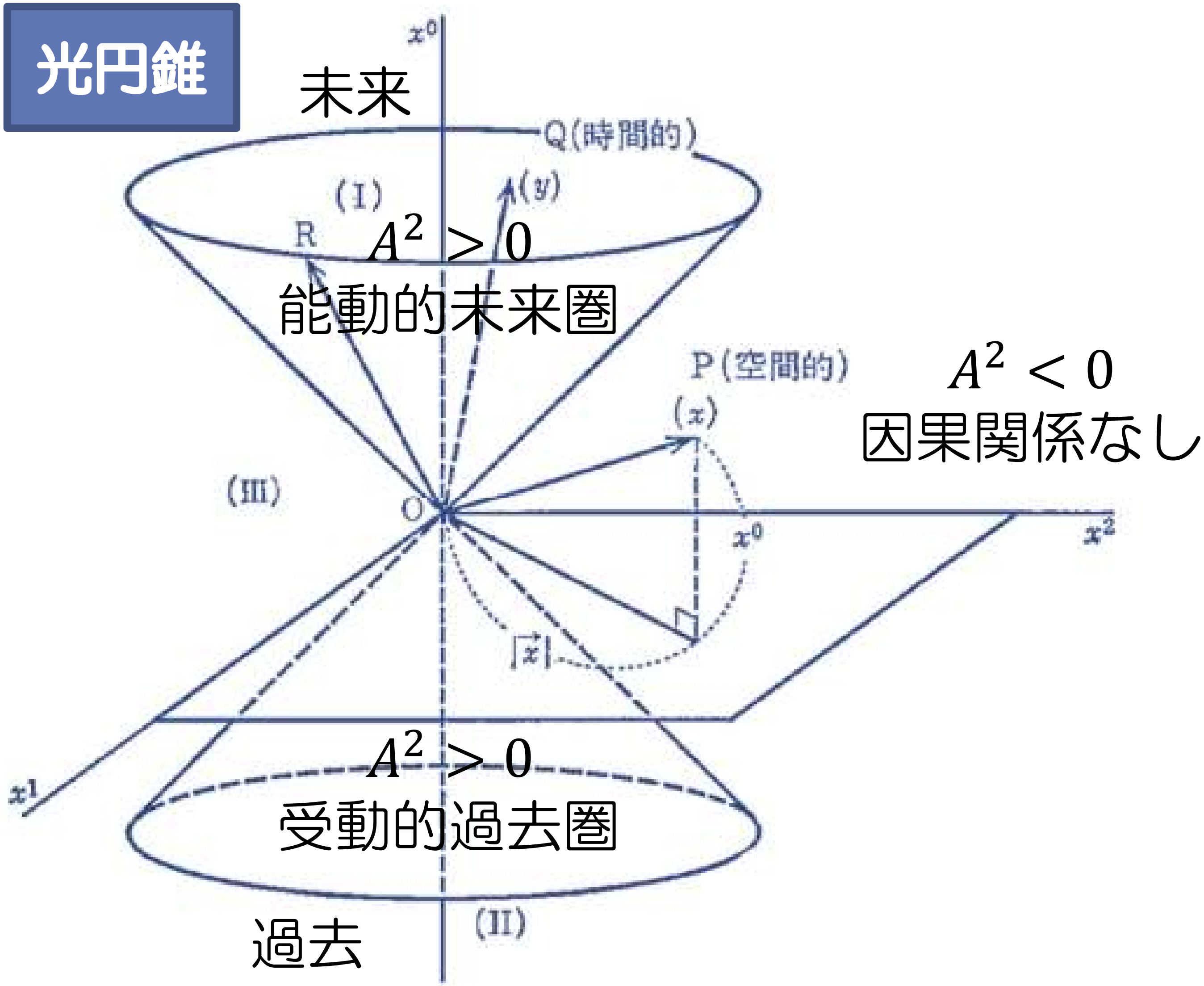
- ベクトルA^μと自身とのスカラー積

$$(A)^2 \equiv A_\mu A^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = -(A^0)^2 + \sum_{k=1}^{3} (A^k)^2$$

  - これをAの大きさの2乗という
  - $(A)^2$は正の値をとるとは限らない
    - $(A)^2 > 0 \cdots\cdots A^\mu$を空間的ベクトル
    - $(A)^2 < 0 \cdots\cdots A^\mu$を時間的ベクトル
    - $(A)^2 = 0 \cdots\cdots A^\mu$をゼロベクトル

8　テンソルの等式、和、積と縮約

光円錐



9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- 異なる世界点でのテンソル成分の和を求め
  - 線形座標変換（*Lorentz*変換）で意味がある
  - では一般座標変換では？

- 一般座標変換でのテンソル成分の和
  - テンソルの変換の係数 $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}, \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}$
  - 一般に世界点の位置の関数となる
  - テンソルの和を求める演算に意味が無い

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

意味のある演算

- 一般の座標変換でのスカラーの和

- $\boldsymbol{S}(x)$の4次元時空内の積分（領域Ω）

$$J \equiv \int_\Omega \boldsymbol{S}(x) dx^0 x^1 x^2 x^3 \equiv \int_\Omega \boldsymbol{S}(x) d^4 x$$

⇩ *Lorentz*変換でx'系に移ったとき…

$$\boldsymbol{S}'(x') d^4 x' = \boldsymbol{S}(x) d^4 x \tag{9.1}$$

が成立するとき

$\boldsymbol{S}(x)$:スカラー密度

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- スカラー密度の変換則
  - x^{μ}と$x^{\mu'}$の間の関数行列式

$$\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{3'})} \equiv \frac{\partial(x)}{\partial(x')}$$

を用いて

$$\boldsymbol{S}'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\boldsymbol{S}(x) \qquad (9.1)'$$

一般座標変換
でも成立する

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- スカラー密度の変換則（*Lorentz*変換の場合）
  - x^{μ}と$x^{\mu'}$の間の関数行列式

$$\frac{\partial(x)}{\partial(x')} \equiv 1/\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \{\det(a^{\mu}{}_{\nu})\}^{-1} = \{det(\boldsymbol{A})\}^{-1}$$

を用いて

$$\boldsymbol{S}'(x') = \{\det(a^{\mu}{}_{\nu})\}^{-1}\boldsymbol{S}(x) \qquad (9.2)$$

⇩

$$\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1 \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{S}'(x') = \pm\boldsymbol{S}(x)\begin{cases} +: \det(a^{\mu}{}_{\nu}) = +1\text{のとき} \\ -: \det(a^{\mu}{}_{\nu}) = -1\text{のとき} \end{cases} \quad (9.2)'$$

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- $\boldsymbol{S}(x)$のスカラー密度の変換則（*Lorentz*変換）
  - $\det(a^{\mu}{}_{\nu}) = 1$のとき……スカラーと同じ
  - 空間の鏡像変換

$$t \to t' = t, \qquad \vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x}$$

の場合、 $\det(a^{\mu}{}_{\nu}) = -1$となるから

$$\boldsymbol{S}'(\vec{x}', t') = -\boldsymbol{S}(\vec{x}, t) \cdots\cdots$$<u>スカラーとは異なる</u>

特殊相対性理論

素粒子論

スカラー密度⇒「擬スカラー」

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- 3階テンソル密度

$$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\nu'}}\boldsymbol{T}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) \quad (9.3)$$

  - のような変換則を持つ量$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$

一般座標変換でも
適用する定義

９　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- 3階テンソル密度（*Lorentz*変換）

$$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x') = \{\det(a^{\rho}{}_{\sigma})\}^{-1} a^{\lambda}{}_{\alpha} a_{\mu}{}^{\beta} a_{\nu}{}^{\gamma} \boldsymbol{T}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x)$$

⇩　$\{\det(a^{\rho}{}_{\sigma})\} = \pm 1$に応じて

$$\boldsymbol{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu}{}'(x') = \pm a^{\lambda}{}_{\alpha} a_{\mu}{}^{\beta} a_{\nu}{}^{\gamma} \boldsymbol{T}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) \qquad (9.3)'$$

$\{\mathbf{det}(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\rho}}{}_{\boldsymbol{\sigma}})\} = \pm\mathbf{1}$に応じて
$\pm\mathbf{1}$という因数がかかる

3階テンソルの
変換則と異なる

3階テンソル密度
⇒「3階擬テンソル」

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- 4階共変テンソル$T_{\lambda\mu\nu\rho}(x)$
  - 添字の並べ替えに対して完全反対称
    $\lambda\mu\nu\rho$の偶置換…成分の値は不変
    $\lambda\mu\nu\rho$の奇置換…元の成分の値と逆符号
    ⇒添字のうち等しいものが一対…その成分は0
  - $T_{0123}(x) \equiv \boldsymbol{T}(x)$を例に考えると
    T_{2013}という偶置換… $\boldsymbol{T}$
    T_{1023}という奇置換… $-\boldsymbol{T}$
    T_{0023}のような等しい添字が一対…0
  - 0か$\boldsymbol{T}$か$-\boldsymbol{T}$の3通りの成分しかない
    本質的にはただ一個の成分を持つ量

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- $\boldsymbol{T}(x)$の*Lorentz*変換

$$\boldsymbol{T}'(x') \equiv \boldsymbol{T}'_{0123}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{2'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{3'}}T_{ijkl}(x) = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}T_{0123}(x) = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\boldsymbol{T}(x) \quad (9.5)$$

一般座標変換でも成り立つ

- 特に*Lorentz*変換の場合

$$\boldsymbol{T}'(x') \equiv \{\det(a^{\rho}{}_{\sigma})\}^{-1}\boldsymbol{T}(x)$$

$\boldsymbol{T}$はスカラー密度

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- 完全反対称4階反変テンソル密度$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$

$$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 1: & (\lambda\mu\nu\rho) \to (0123)\text{が偶置換のとき} \\ -1: & (\lambda\mu\nu\rho) \to (0123)\text{が奇置換のとき} \\ 0: & \text{その他の場合} \end{cases}$$

を定義

- 座標変換して他の系に移ったときの成分を$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho\prime}$

$$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho\prime} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^l} \boldsymbol{E}^{ijkl}$$

- $\partial(x')/\partial(x)$に$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$をかけたもの

$$\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho\prime} = \boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$$

一般座標変換でも成り立つ

９　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

$$\boldsymbol{T}(x) = \frac{1}{4!}\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}T_{\lambda\mu\nu\rho}$$

というスカラー密度が求められた

- 完全反対称4階反変テンソル密度
  ⇒スカラー密度

９　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- $\boldsymbol{E}$を使ってテンソル⇒テンソル密度
  - 完全反対称3階共変テンソル$T_{\boldsymbol{\lambda\mu\nu}}(x)$を考える

    $$\boldsymbol{T}^{\lambda}(x) \equiv \frac{1}{3!}\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}T_{\mu\nu\rho} \cdots \text{反変ベクトル密度}$$

  - $f_{\mu\nu}$を反対称2階共変テンソルとして

    $$*\,\boldsymbol{f}^{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2!}\boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}f_{\nu\rho} \cdots \text{2階反変ベクトル密度}$$

  - 共変ベクトルA_{μ}から

    $$\boldsymbol{A}^{\lambda\mu\nu} \equiv \boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho}A_{\rho} \cdots \text{3階反変テンソル密度}$$

9　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

- $* \boldsymbol{f}^{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2!} \boldsymbol{E}^{\lambda\mu\nu\rho} f_{\nu\rho}$について

$$* \boldsymbol{f}^{01} = f_{23}, \quad * \boldsymbol{f}^{02} = f_{31}, \quad * \boldsymbol{f}^{03} = f_{12}$$
$$* \boldsymbol{f}^{23} = f_{01}, \quad * \boldsymbol{f}^{31} = f_{02}, \quad * \boldsymbol{f}^{12} = f_{03}$$

  - $* \boldsymbol{f}$はテンソル密度
    ⇒ 空間の鏡像変換をしてもそのまま

- デュアル・テンソル
  - $* \boldsymbol{f}^{\lambda\mu}$が元の共変テンソル$f_{\mu\nu}$にデュアルなテンソル密度
  - $\boldsymbol{T}^{\lambda}$は$T_{\mu\nu\rho}$にデュアルなベクトル密度
  - $\boldsymbol{A}^{\lambda\mu\nu}$は$A_{\rho}$にデュアルなテンソル密度

９　反対称テンソル、テンソル密度、デュアル・テンソル

$$\partial_\lambda \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{\lambda}} = \partial_0 T_{123} - \partial_1 T_{230} + \partial_2 T_{301} - \partial_3 T_{012}$$

$$\begin{cases} \partial_\lambda * \boldsymbol{f}^{\lambda 0} = -(\partial_1 f_{23} + \partial_2 f_{31} + \partial_3 f_{12}) \\ \partial_\lambda * \boldsymbol{f}^{\lambda 1} = \partial_2 f_{30} + \partial_3 f_{02} + \partial_0 f_{23} \\ \partial_\lambda * \boldsymbol{f}^{\lambda 2} = -(\partial_3 f_{01} + \partial_0 f_{13} + \partial_1 f_{30}) \\ \partial_\lambda * \boldsymbol{f}^{\lambda 3} = \partial_0 f_{12} + \partial_1 f_{20} + \partial_2 f_{01} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_\lambda \boldsymbol{A}^{\lambda 23} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0, \quad \partial_\lambda \boldsymbol{A}^{\lambda 31} = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0, \cdots \\ \partial_\lambda \boldsymbol{A}^{\lambda 01} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2, \quad \cdots\cdots \quad , \cdots \end{cases}$$