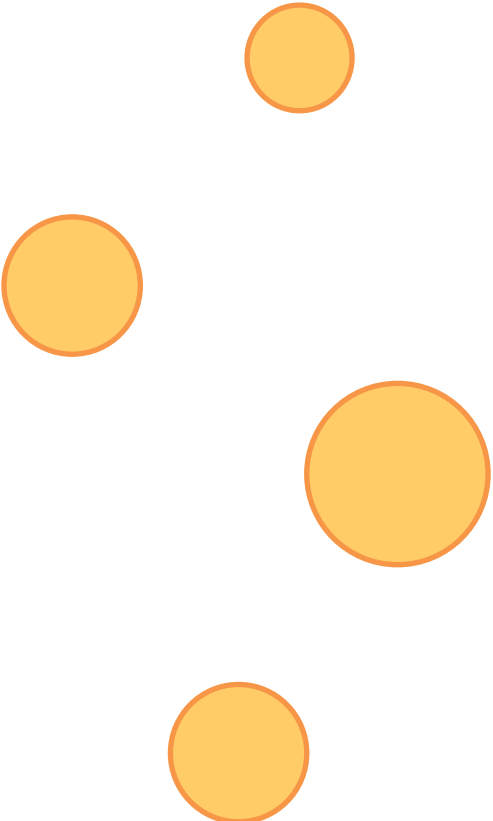




相対論 9回め (20,21,22)

担当 えじり

Riemann空間

座標 x^μ ($\mu=0,1,2,3$) 1価、連続の条件

座標系 時空内のある領域に属するすべての点に
1価連続な座標を割り振ったもの

一般には全時空をいくつかの領域に分割し、それぞれの座標系にそれに適した座標系を設け、隣り合った領域ではそれぞれの座標系が重なり合うようにする

x' が座標となるには

$$x'^{\mu'} = f^{\mu'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv f^{\mu'}(x) \quad (\mu'=0,1,2,3) \quad (20.1)$$

という関数関係があり、 $f^{\mu'}(x)$ は必要な階数だけ微分可能とする
4個の数 $x^{\mu'}$ が独立であるための必要条件

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \equiv \det\left(\frac{\partial f^{\mu'}(x)}{\partial x^\nu}\right) \neq 0 \quad (20.2)$$

が両座標系の重なり合った
部分で成り立つとする

Riemann空間

時空内の隣接した2点の座標を x^μ 、 $x^\mu + dx^\mu$ とし、距離 ds は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (19.6)$$

別の座標系 x' をつかうと

$$ds^2 = g_{\mu\nu}'(x') dx'^\mu dx'^\nu$$

と同じであり、 $g_{\mu\nu}'$ は

$$g_{\mu\nu}'(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (20.3)$$

$g_{\mu\nu}$ の値は (19.6) と等価原理から知ることができる。

(19.6) を使って2点間の距離をあらわせるような連続体を **Riemann空間** といい、Riemann空間において成り立つ幾何学を **Riemann幾何学** という。

テンソル、テンソル密度

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = f^\mu(x) \quad (\mu=0,1,2,3) \quad (20.1)$$

スカラー、ベクトル、テンソルの定義は、Ⅱ章での定義をそのままRiemann空間で使える

テンソルの定義

$$T^{\lambda\mu\cdots}_{\rho\sigma\cdots}{}'(x') \equiv \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^b} \cdots \frac{\partial x^i}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{\sigma'}} \cdots T^{ab\cdots}_{ij\cdots}(x) \quad (21.1)$$

注: 変換係数

$\frac{\partial x'}{\partial x}$ はすべて x の関数

そして各点ごとに異なる

異なる世界点におけるテンソルの演算(和・差・積など)



無意味

同じ世界点におけるテンソルの演算、縮約、内積、添え字の対称性



そのまま使える

テンソル、テンソル密度

スカラー、ベクトル、テンソルの例

ds

スカラー

dx^μ

ベクトル(の成分)

$g_{\mu\nu}(x)$

2階共変テンソル

δ^μ_ν

混合テンソル

$g^{\mu\rho}(x)$

2階反変テンソル

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

注: x^μ 自身はベクトルではない

$$g^{\mu\rho}(x)g_{\rho\nu}(x) = \delta^\mu_\nu$$

テンソル、テンソル密度

テンソル密度

定義はⅡ章と同じ。密度量を太字にする

スカラー密度 任意の2階共変テンソルの行列式の平方根で求められる

$$\textbf{S}(x) \equiv \sqrt{\det(A_{\mu\nu})} \quad (21.2)$$

太字

$A_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ としたもの $\sqrt{-g(x)}$ がスカラー密度として重要となる

たとえば テンソル $T^{\dots\dots}$ のテンソル密度は

$$\textbf{T}^{\dots\dots} \equiv \sqrt{-g} T^{\dots\dots}$$

太字

$$g(x) \equiv \det\{g_{\mu\nu}(x)\} < 0$$

一般座標変換 $x \rightarrow x'$ では

$$\sqrt{-g(x)} d^4x = \sqrt{-g'(x')} d^4x' = \text{不変} \quad (21.3)$$

点 x の局所 Lorentz 系 (X^μ) を用いると

$$\sqrt{-g(x)} d^4x = dX^0 dX^1 dX^2 dX^3 \quad (21.3)'$$

不変4次元体積素片
は d^4x ではなく $\sqrt{-g} d^4x$

テンソル、テンソル密度

ベクトルの大きさ

$$(A^2) \equiv g_{\mu\nu}(x) A^\mu(x) A^\nu(x) \quad \text{ベクトル} A \text{の大きさの2乗}$$

Minkowski空間での添え字の上げ下げ $\Rightarrow \eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$



Riemann空間での添え字の上げ下げ $\Rightarrow g^{\mu\nu}(x), g_{\mu\nu}(x)$

$$A_\mu(x) \equiv g_{\mu\nu}(x) A^\nu(x)$$

$$A^\nu(x) \equiv g^{\mu\nu}(x) A_\mu(x)$$

$$(A)^2 = A_\mu A^\mu$$

テンソル、テンソル密度

特殊の時と同様にAを分類する

$$(A)^2 \begin{cases} > 0 & \text{空間的ベクトル} \\ = 0 & \text{ゼロベクトル} \\ < 0 & \text{時間的ベクトル} \end{cases}$$

座標系は任意でよいものの、現実の時空では制限がつく

4個のベクトルのうち $d_0 x^\mu$ は常に**時間的**、他の3個は常に**空間的**ベクトルであるように座標系を設ける

$$d_0 x^\mu = (dx^0 \neq 0, dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0)$$

$$d_1 x^\mu = (dx^1 \neq 0, dx^0 = dx^2 = dx^3 = 0)$$

$$d_2 x^\mu = (dx^2 \neq 0, dx^0 = dx^1 = dx^3 = 0)$$

$$d_3 x^\mu = (dx^3 \neq 0, dx^0 = dx^1 = dx^2 = 0)$$

この条件のための $g_{\mu\nu}$ の条件式

$$g_{00}(x) < 0 \quad g_{ii}(x) > 0$$

$$\begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik} \\ g_{ki} & g_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad g(x) < 0$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

スカラー密度

$$\underset{\text{太字}}{S}(x) = \sqrt{-g(x)} S(x)$$

スカラー スカラー

$$I = \int_{\Omega} \underset{\text{太字}}{S}(x) d^4 x = \int S(x) \sqrt{-g(x)} d^4 x \quad (22.1)$$

一般座標系に対して不変

ベクトルでない ベクトル

$$I^{\mu} = \int V^{\mu}(x) \sqrt{-g(x)} d^4 x$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

$$\begin{array}{ll}
 \text{無限小面積素片} & d\sigma^{\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} d_1 x^\mu & d_1 x^\nu \\ d_2 x^\mu & d_2 x^\nu \end{vmatrix} \\
 \text{完全反対称テンソル} & \\
 \text{無限小体積素片} & dv^{\lambda\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} d_1 x^\lambda & d_1 x^\mu & d_1 x^\nu \\ d_2 x^\lambda & d_2 x^\mu & d_2 x^\nu \\ d_3 x^\lambda & d_3 x^\mu & d_3 x^\nu \end{vmatrix}
 \end{array} \quad (22.2)$$

$$\int A_\mu dx^\mu \quad \iint A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \quad \iiint T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} \quad (22.3)$$

任意のベクトル、反対称テンソルの積分はスカラー

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

Stokesの定理 $\frac{1}{2!} \iint_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \oint_C A_\mu dx^\mu$ (22.4)

ひとつの閉曲線Cを境界とする任意の2次元曲面S

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (22.5)$$

$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} \equiv 0$
が成立すると、どうSをとっても等しい

3次元Gaussの定理

$$\frac{1}{2!} \iint_S A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!} \iiint_V F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} \quad (22.6)$$

$\partial_\rho F_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda F_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu F_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu F_{\rho\lambda\mu} \equiv 0$
が成立すると、どうVをとっても等しい

$$F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \quad (22.7)$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

4次元Gaussの定理

任意の閉じた3次元超曲面 V により囲まれた4次元領域を Ω とする

菱面体の4次元体積

$$d\omega^{\rho\lambda\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} d_0 x^\rho & d_0 x^\lambda & d_0 x^\mu & d_0 x^\nu \\ d_1 x^\rho & d_1 x^\lambda & d_1 x^\mu & d_1 x^\nu \\ d_2 x^\rho & d_2 x^\lambda & d_2 x^\mu & d_2 x^\nu \\ d_3 x^\rho & d_3 x^\lambda & d_3 x^\mu & d_3 x^\nu \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{3!} \iiint_V T_{\lambda\mu\nu} d\sigma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!} \iiint_\Omega W_{\rho\lambda\mu\nu} d\omega^{\rho\lambda\mu\nu} \quad (22.10)$$

完全反対称

$$W_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu} \quad (22.11)$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

$$\begin{aligned}
 (22.4) \quad & \frac{1}{2!} \iint_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \oint_C A_\mu dx^\mu \\
 (22.6) \quad & \frac{1}{2!} \iint_S A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!} \iiint_V F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} \\
 (22.10) \quad & \frac{1}{3!} \iiint_V T_{\lambda\mu\nu} d\sigma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!} \iiint\!\!\!\int_\Omega W_{\rho\lambda\mu\nu} d\omega^{\rho\lambda\mu\nu}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (22.4) \\ (22.6) \\ (22.10) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{スカラー} \\ \text{一般座標変換に} \\ \text{対して不変} \end{array}$$

$$d\sigma^{\mu\nu}, dv^{\lambda\mu\nu}, d\omega^{\rho\lambda\mu\nu} \quad \text{反対称テンソル}$$

$$f_{\mu\nu}, F_{\lambda\mu\nu}, T_{\rho\lambda\mu\nu} \quad \text{完全反対称共変テンソル}$$

ベクトル・テンソルの単なる微分はテンソルとはならないが、(22.5)～(22.11)のような特別な組み合わせをとれば、階数が1だけ高い共変テンソルとなる

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

$$\frac{1}{3!} \iiint_V T_{\lambda\mu\nu} d\sigma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!} \iiint \int_{\Omega} W_{\rho\lambda\mu\nu} d\omega^{\rho\lambda\mu\nu} \quad (22.10) \text{をかきかえる}$$

$$\text{右辺は } \iiint \int_{\Omega} W_{0123} d\omega^{0123}$$

4個の無限小ベクトルは(21.4)を採用

$$d\omega^{0123} = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv d^4 x$$

$$W_{0123}(x) \equiv \sqrt{-g} W(x) \equiv \mathbf{W}(x) \quad (22.12)$$

太字

とおく

$$\mathbf{W}_{\text{太字}} = \frac{1}{4!} \mathbf{E}_{\text{太字}}^{\rho\lambda\mu\nu} W_{\rho\lambda\mu\nu} \quad (22.12)'$$

右辺に(22.11)を代入

$$\mathbf{T}_{\text{太字}}^{\rho} \equiv \frac{1}{3!} \mathbf{E}_{\text{太字}}^{\rho\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu} \quad (22.13)$$

$$\mathbf{W}_{\text{太字}} = \partial_{\rho} \mathbf{T}_{\text{太字}}^{\rho} \quad (22.12)''$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

$$T^0 = T_{123}, T^1 = -T_{230}, T^2 = -T_{310}, T^3 = -T_{120}$$

(22.10)左辺は

$$\int_V \left\{ T^0 dv^{123} - T^1 dv^{230} + T^2 dv^{301} - T^3 dv^{012} \right\} = \frac{1}{3!} \int_V \varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu} T^\rho dv^{\lambda\mu\nu}$$

$$\varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1: (\rho \lambda \mu \nu) \rightarrow (0123) \text{が偶置換} \\ -1: \text{奇置換} \\ 0: \text{その他の場合} \end{cases} \quad (22.14)$$

いかなる座標系でも↑の定義 テンソルではない

$$(22.10) \text{は} \quad \frac{1}{3!} \int_V \varepsilon_{\rho\lambda\mu\nu} T^\rho dv^{\lambda\mu\nu} = \int_\Omega \partial_\rho T^\rho d^4x \quad (22.15)$$

ベクトル密度

$$\partial_\rho T^\rho = \text{スカラー密度} \quad (22.16)$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

$$\frac{1}{2!} \iint_S A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!} \iiint_V F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} \quad (22.6) \text{を書き換える}$$

むり、まにあわなかった。。。。

もんだい

$$g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

の関係式を証明せよ

ちょーかんたん

こたえ

$$g^{ij} g_{ij} = \delta^j_j$$

の両辺を微分すれば簡単に求められる

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} g_{ij} + g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$$

$$g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$