相対ゼミ6かいめ
第Ⅳ章　相対論的力学(14,15,16)

たんとう:えじり

相対論的運動学

Newtonの法則をLorentz変換に対して不変となるようにしよう！！

今まで **x^k(k=1,2,3)** と質点の空間的位置を時間の関数で表していた

相対論では時間と空間を同格に扱いたい！

これからは4次元座標

x^μ(μ=0,1,2,3) で表そう!

質点が⊿x^μ移動した場合の世界間隔（の2乗）は

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c(\Delta t)^2 + (\Delta \vec{x})^2 \equiv \underline{-c^2(\Delta\tau)^2} \qquad \textbf{(14.1)}$$

こうτを定義する

（Lorentz変換に対して不変な実数のパラメータ）

相対論的運動学　～固有時間～

ある瞬間に運動している質点と同じ速度で走っている座標系S'から質点をながめた場合

質点は瞬間τにには静止して見えるから

$$x^{k}{}'(\tau) = x^{k}{}'(\tau + \Delta\tau) \qquad \text{(k=1,2,3)}$$

$$x^{0}{}'(\tau + \Delta\tau) - x^{0}{}'(\tau) = \Delta x^{0}{}' = c\Delta t' \neq 0$$

世界間隔は　$-c^{2}(\Delta\tau)^{2} = \eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}{}'\Delta x^{\nu}{}' = -c^{2}(\Delta t')^{2}$

$$\Rightarrow \Delta\tau = \Delta t'$$

τは質点と一緒に運動している時計の示す t' と同じ

↓

各々の質点に結びつけた時計の読みが、その質点のτ

τはこう書き換えられる（4.1式）

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^{2}} \qquad \textbf{(14.1)'}$$

τをその質点の**固有時間**という

相対論的運動学　～4元速度～

4元速度（反変ベクトル）

$$u^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}(\tau)}{d\tau} \qquad \textbf{(14.2)}$$

質点はS'系の原点に固定

$$x^{\mu}{}'(\tau) = \left(x^{0}{}'、\vec{x}{}' \equiv 0\right)$$ S'系の座標

$$x^{\mu}(\tau)$$ S系の座標

Lorentz変換の式 $$x^{\mu}{}' = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

$$x^{\nu} = b^{\nu}{}_{\mu} x^{\mu}{}' = b^{\nu}{}_{0} x^{0}{}'$$

τで微分

$$u^{\nu} = b^{\nu}{}_{0} c \frac{dt'}{d\tau} = c b^{\nu}{}_{0} \qquad \textbf{(14.3)}$$

相対論的運動学

(14.1)’ $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}$ から、

$$u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(14.4)

$\vec{v} = v^k$ (k=1,2,3)

$$\beta = \left|\frac{\vec{v}}{c}\right|$$

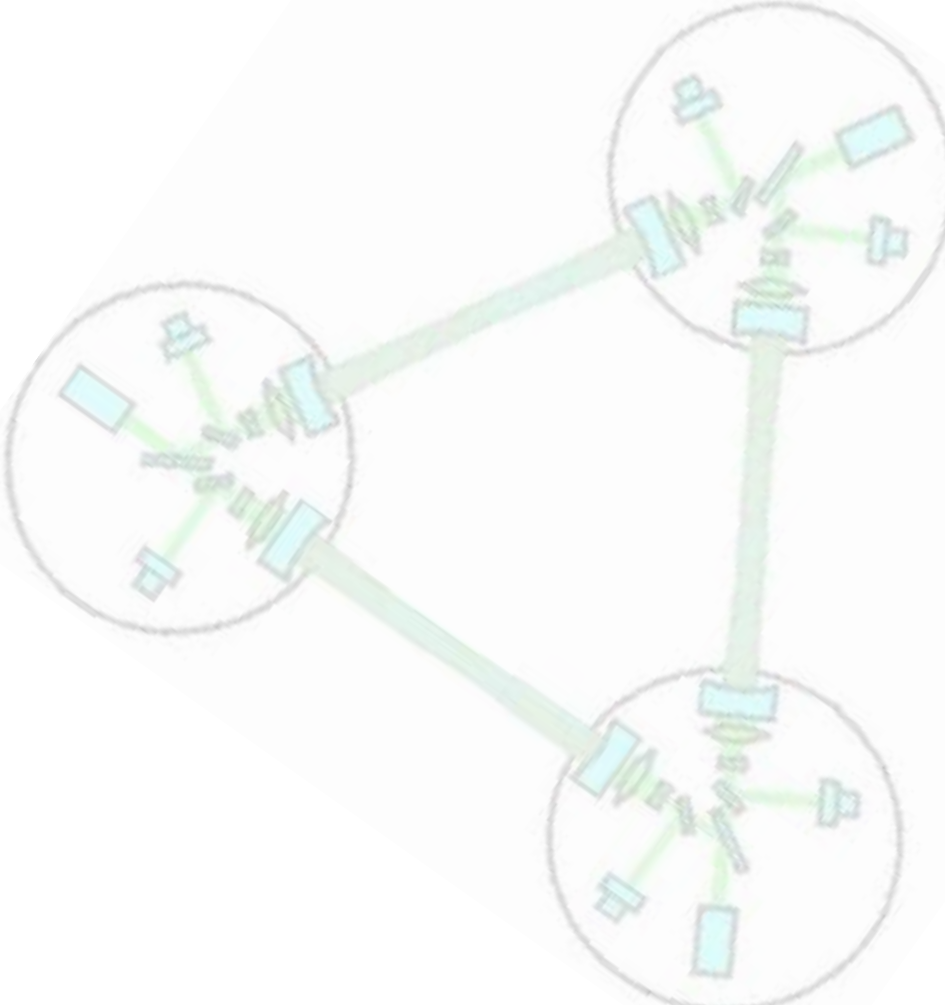
(14.4)を使うと次式が導ける

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$$ **(14.5)**

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相対論的運動学

速度の合成則



相対論的力学　～4元加速度～

4元加速度　（反変ベクトル）

$$a^{\mu} \equiv \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2}$$

(14.5)式　$\eta_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = -c^2$

をτで微分すると

$$\eta_{\mu\nu} u^{\mu} a^{\nu} = 0 \quad \textbf{(14.6)}$$

4元速度と4元加速度は直交する

3次元加速度との関係

$$\vec{a} = \left(a^1, a^2, a^3\right) = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{c^2\left(1-\beta^2\right)^2}\vec{v}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$a^0 = \frac{1}{c^2\left(1-\beta^2\right)^2}\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

力学の基礎方程式の相対論的修正

S'系から見たとき、ある瞬間で質点が静止していたら、

Newtonの方程式がその瞬間だけ成り立つ

$$m\frac{d^2x^{k'}}{dt'^2}=F^{k'}$$

$$\frac{dx^{k'}}{dt'}=0 \qquad (k=1,2,3) \qquad \textbf{(15.1)}$$

m :質点の質量

$F^{0'}$:S'系から見た外力の第k成分

3次元ベクトルで表されていた力を4元ベクトルに拡張するため

$$m\frac{d^2x^{0'}}{dt'^2}=F^{0'} \qquad \textbf{(15.2)}$$

左辺 $\frac{d^2(ct')}{dt'^2}=0$

↓

$$F^{0'}=0$$

S'系における力学の基礎方程式をまとめると

$$m\frac{d^2x^{\mu'}}{dt'^2}=F^{\mu'} \qquad (\mu=0,1,2,3) \qquad \textbf{(15.3)}$$

力学の基礎方程式の相対論的修正

S'系は、この瞬間だけ質点の静止系だから、t'を固有時間τにすりかえることができる

$$m\frac{d^2x^{\mu}{}'}{d\tau^2}=F^{\mu}{}' \quad \textbf{(15.3)'}$$

左辺が反変ベクトルだから、

右辺Fμ'も反変ベクトル

(15.3)'にLorentz変換S'→Sをすると、一般の慣性系Sからみた力学の基礎方程式は

$$m\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}=F^{\mu} \quad \textbf{(15.4)}$$

$\frac{dx^k}{d\tau}=0$ でなくてよい

今までの、ある静止系となる瞬間だけでなく、常に成り立つ

$x^{\nu}=b^{\nu}{}_{\mu}x^{\mu}{}'$ だから

$$F^{\mu}=b^{\mu}{}_{\nu}F^{\nu}{}'=\sum_{k=1}^{3}b^{\mu}{}_{k}F^{k}{}' \quad \textbf{(15.5)}$$

力学の基礎方程式の相対論的修正

相対論的な力 F^μ は反変ベクトルで、**4元力**という

4個の成分の間に、1つ線形関係式があり、真に独立な成分は3個

(15.5)式から

$$F^\mu = \sum_{k=1}^{3} b^\mu{}_k F^{k'}$$

$$\eta_{\mu\nu} b^\nu{}_0 F^\mu = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\eta_{\mu\nu} b^\nu{}_0 b^\mu{}_k}_{=0} F^{k'}$$

$$b^\mu{}_\sigma = \eta^{\mu\lambda} a^\rho{}_\lambda \eta_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(14.3)式を左辺に代入して $u^\nu = cb^\nu{}_0$

$$u_\mu F^\mu = 0 \qquad \textbf{(15.6)}$$

力学の基礎方程式の相対論的修正

(15.6)が成り立たないと(15.4)は自己矛盾をひきおこす

(15.4)の両辺に u_μ をかけると

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=F^\mu$$

$$\boxed{mu_\mu a^\mu = u_\mu F^\mu}$$

(14.6) $\eta_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = 0$

より左辺は0

$$u_\mu F^\mu = 0 \qquad (15.6)$$

(15.6)は4元力がどんなものでも満足しなければならない条件

力学の基礎方程式の相対論的修正

Fμの実例

電荷e,質量mの陽子が真空中で電磁場 $f_{\mu\nu}$の作用をうけて運動している場合

静止系S'からみた力は

$$F^{i}{}' = eE_{i}{}' = cef^{0i}{}' = cea^{0}{}_{\rho}a^{i}{}_{\sigma}f^{\rho\sigma}$$

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(15.5) $F^{\mu} = \sum_{i=1}^{3} b^{\mu}{}_{i} F^{i}{}'$ より、S系では

$$F^{\mu} = \sum_{i=1}^{3} ceb^{\mu}{}_{i}a^{i}{}_{\sigma}a^{0}{}_{\rho}f^{\rho\sigma}$$

力学の基礎方程式の相対論的修正

$$F^{\mu}=\sum_{i=1}^{3} ce\underline{b^{\mu}{}_{i}a^{i}{}_{\sigma}}a^{0}{}_{\rho}f^{\rho\sigma}$$

前回13章(p81)ででてきた式

$$\sum_{k=1}^{3} b^{\nu}{}_{k}a^{\lambda}{}_{\rho}=\delta^{\nu}{}_{\sigma}-b^{\nu}{}_{0}b_{\sigma}{}^{0}=\delta^{\nu}{}_{\sigma}$$

$$\boxed{F^{\mu}=eca^{0}{}_{\rho}f^{\rho\mu}}$$

(5.9)(14.3)より

$$a^{0}{}_{\rho}=b_{\rho}{}^{0}=-\frac{u_{\rho}}{c}$$

$$\boxed{F^{\mu}=ef^{\mu\rho}u_{\rho}\qquad \textbf{(15.7)}}$$

力学の基礎方程式の相対論的修正

(15.7)を(14.4)を使って計算して、3次元ベクトルでかくと

$$\vec{F} = \left(F^1, F^2, F^3\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} \vec{K} \qquad \textbf{(15.8)}$$

$$\vec{K} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

S系からみたローレンツ力

$$cF^0 \sqrt{1-\left(v/c\right)^2} = e\vec{E}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{K} \qquad \textbf{(15.9)}$$

単位時間中に電磁場が陽子に与える仕事

$$F^\mu = ef^{\mu\rho}u_\rho \qquad (15.7)$$

$$u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (14.4)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v}\times\vec{B} = 0$$

エネルギーおよび運動量

(15.4)をかきかえる

$$\frac{d}{d\tau} p^{\mu} = F^{\mu} \qquad \textbf{(16.1)}$$

$$m\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = F^{\mu} \qquad (15.4)$$

4元運動量　（反変ベクトル）

$$p^{\mu} \equiv m u^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \qquad \textbf{(16.2)}$$

(14.1)'を使って(16.1)をかきかえる

$$\vec{p} = \left(p^1, p^2, p^3\right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} \qquad (14.1)'$$

エネルギーおよび運動量

(15.8)より

$$\vec{K} \equiv \vec{F}\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} \qquad \textbf{(16.3)}$$

力学の意味における力

(16.1)の空間的成分は

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K} \qquad \textbf{(16.1)'}$$

質点の運動量を表す

(16.1)の時間的成分は

$$\frac{d}{dt}\left(cp^0\right) = cF^0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \vec{K}\cdot\vec{v} \qquad \textbf{(16.1)''}$$

$$cp^0 = \left(\text{質点のもつエネルギー}\right) + const.$$

という解釈ができる

アインシュタインは
const.=0とおいた

まとめ

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = \text{質点の運動量} \\ cp^0 &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = W = \text{質点のエネルギー} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(16.2)'}$$

エネルギーおよび運動量

(16.2)'でv=0の場合、運動量は0でもエネルギーWはmc²となる

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = W$$

質量mの質点の**静止エネルギー**という

（Wは力学的エネルギーに限らず、どんなエネルギーでもいい）

逆に考えると、エネルギーWがあれば、必ずW/c²の**静止質量**をもつ

例）　同じ大きさの鉄でも、高温のほうが（内部エネルギーが大きいから）静止質量は大きくなる

(16.1)を拡張して求めてみよう！

$$\frac{dp^{k}{}'}{d\tau} = 0 \quad (k=1,2,3)$$

← 質点の静止系S'からみて、外力は働いてないとする

$$\frac{dp^{0}{}'}{d\tau} = \frac{Q'}{c} \equiv F^{0}{}'$$

← 質点は加熱されており、単位時間に質点に与える熱エネルギーをQ'とする

エネルギーおよび運動量

一般の座標系Sからみると

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \qquad \textbf{(16.4)}$$

$$F^\mu \equiv b^\mu{}_0 F^{0\prime} = \frac{Q'}{c} b^\mu{}_0$$

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$$

$$b^\mu{}_0 = \frac{u^\mu}{c} \qquad (14.3)$$

$$u_\mu F^\mu = 0 \qquad (15.6)$$

u_μをかける

$$\text{左辺} = u_\mu \frac{d}{d\tau}\left(mu^\mu\right) = -c^2 \frac{dm}{d\tau}$$

$$u_\mu F^\mu = \frac{Q'}{c} u_\mu b^\mu{}_0 = -Q'$$

この4元力は(15.6)を満たさない！

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{Q'}{c^2}$$

条件(15.6)を満たさない力の場合は、力学的仕事以外に他の種類のエネルギーが質点に流れ込む

物体を加熱すると質量が増えるという式が出た！

エネルギーおよび運動量

$$u_\mu u^\mu = -c^2 \quad \textbf{(16.5)}$$

を使うと

$$p_\mu p^\mu = -(mc)^2 \quad \textbf{(16.6)}$$

$$W = c\sqrt{(\vec{p})^2 + (mc)^2} \quad \textbf{(16.6)'}$$

(14.3)を使うと
証明できる

$$p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu p^\mu$$
$$= -(p^0)^2 + (\vec{p})^2$$
$$= -\frac{W^2}{c^2} + (\vec{p})^2 = -(mc)^2$$

$|v| << c$のとき$(|\vec{p}| \approx mv << mc)$

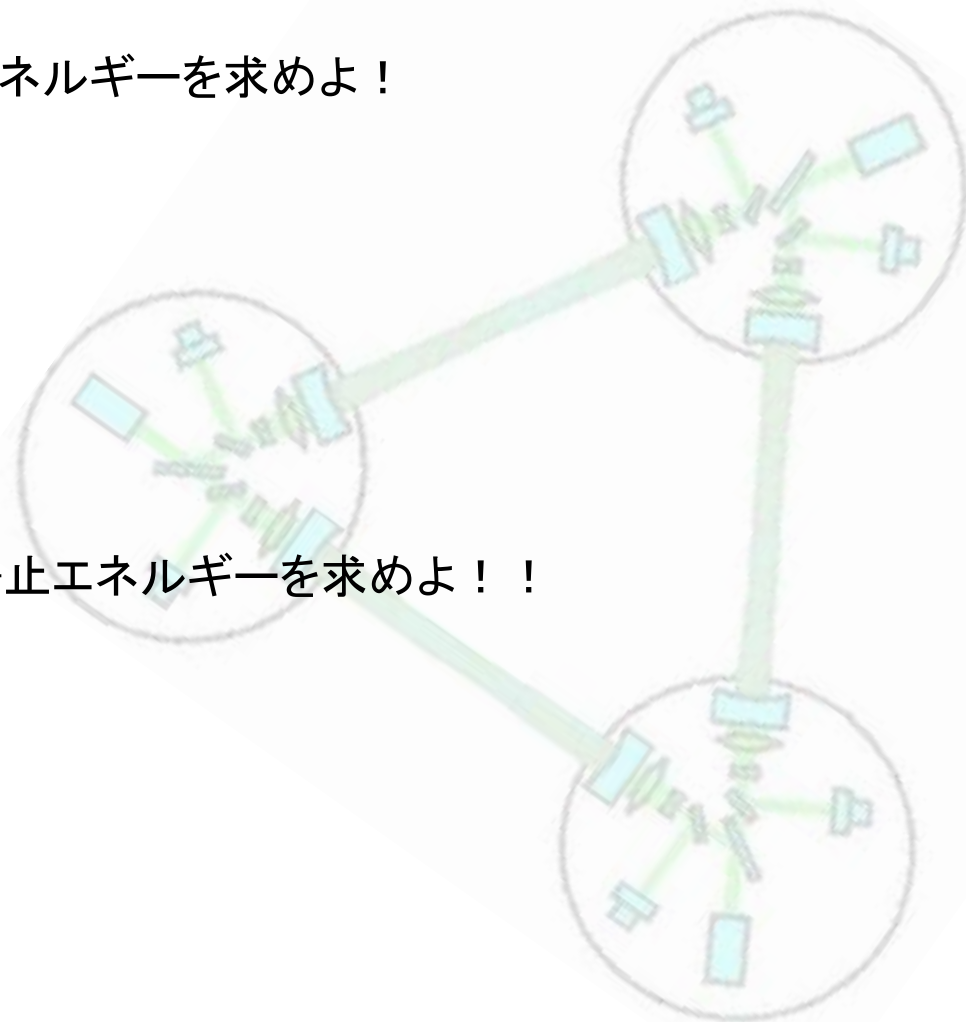
$$W = mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{p})^2 \underbrace{+ \cdot\ \cdot\ \cdot}_{\text{無視}}$$

(16.6)’を
テイラー展開

$$W(Einstein) = mc^2 + W(Newton)$$

もんだい

電子の静止エネルギーを求めよ！



我妻さんの静止エネルギーを求めよ！！