相対論ゼミ 4回目

第Ⅲ章 相対論的電磁気学（10,11,12節）

たんとう：えじり

数学の復習

$$\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$$

$$\phi\left(x, y, z\right)$$

$$div\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$grad\phi = \nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi, \frac{\partial}{\partial y}\phi, \frac{\partial}{\partial z}\phi\right)$$

$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y, \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z, \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)$$

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Maxwell方程式の復習

前提：真空中に荷電粒子が散在している場合を考える

Maxwell方程式

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad (10.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\ \vec{E} = 0 \qquad (10.2)$$

$$div\ \vec{D} = \rho \qquad (10.3)$$

$$rot\ \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \qquad (10.4)$$

ρ	電荷密度
$\vec{j}$	電流密度
$\vec{D}$	電束密度
$\vec{E}$	電場の強さ
$\vec{B}$	磁束密度
$\vec{H}$	磁場の強さ

真空中では

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad (10.5)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Maxwell方程式のおおまかな解釈

(1) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

磁場の発生源はない

(2) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$

ファラデーの電磁誘導の法則
（磁場が変化すると電場が発生）

(3) $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

電場は電荷から生じる

(4) $\nabla \times \vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$

マクスウェルーアンペールの法則
（磁場は電場の変化と電流から生じる）

電磁ポテンシャルを使ってMaxwell方程式を書く①

(10.1)(10.2)から、EとBは電磁ポテンシャルA、Φを使って表される

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (10.6)$$

ちなみにこんな公式使ったよ

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \Delta \vec{A}$$

(10.6)を使って(10.3)(10.4)を書き直してみると

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} + \Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \nabla\underline{\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)} = -\mu_0 \vec{j}$$

これを＝0にしたら簡単に書けるのに･･･

＝0っていう条件にしちゃえ！（ローレンツ条件）

電磁ポテンシャルを使ってMaxwell方程式を書く②

ローレンツ条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad (10.9)$$

を使って(3)(4)式は

$$\Box\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (10.7)$$

$$\Box\vec{A}=-\mu_0\vec{j} \qquad (10.8)$$

ちなみに

$$\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

で、ダランベルシアンという演算子

ゲージ変換

電場・磁場が決まっても、電磁ポテンシャルは一意的には決まらない

A,Φを次のように書き換えてみる（λは（x y z t）の任意の関数）

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

$$\nabla\times\nabla\lambda = 0$$

だから

これを(5)(6)に代入すると

$$\vec{B}' = \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\left(\vec{A}+\nabla\lambda\right) = \nabla\times\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} - \nabla\phi' = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}+\nabla\lambda\right) - \nabla\left(\phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi = \vec{E}$$

となり、B・Eの値は不変

このようなA、Φの変換を**ゲージ変換**という

Maxwell方程式はゲージ変換のもとで不変！

λの値を好きにとって、条件を満足するようにAとΦを変えることができる

ここまでは電磁気の復習。次から相対論的になりますよ～

Maxwell方程式の相対論的書き換え①

電荷保存の法則 $\nabla \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (10.11)

電流密度を

$$\begin{cases} j^1 = j_x \\ j^2 = j_y \\ j^3 = j_z \\ j^0 = c\rho \end{cases} \quad \textbf{(11.1)}$$

と書いた場合

ある慣性系Sで

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu j^\mu = 0 \qquad (11.2)$$

他の慣性系S'において

$$\sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu' j^{\mu'}(x') = 0$$

(10.11)はこう書きなおせる

j^μ :**4元電流**

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

∂_μは、共変ベクトル

S系でもS'系でも電荷保存則は成り立つには、j^μ が反変ベクトルじゃないと

Maxwell方程式の相対論的書き換え①

$$\begin{cases} A^0 = \dfrac{1}{c}\phi \\ A^1 = A_x \\ A^2 = A_y \\ A^3 = A_z \end{cases} \quad (11.3)$$

とおいて、**(10.7,8)**を書き直すと

Maxwell方程式を書き換えた式

$$\Box A^\lambda = -\mu_0 j^\lambda \quad \textbf{(11.4)}$$

ローレンツ変換をしてもこの形式を保つために
A $^\mu$ は反変テンソル

ちなみに□は $\Box = \partial^i \partial_i$
でローレンツ変換に不変な演算子

ローレンツ条件**(10.9)**は

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (11.5)$$

左辺はスカラーとなって、どの慣性系でも成立する

$$A_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} A^\nu$$

A_μ, A^μ を、**4元ポテンシャル**という

Maxwell方程式の相対論的書き換え①

電磁場のテンソル $f_{\mu\nu}$

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -f_{\nu\mu}$$

(11.7)

いくつか計算載せます

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

E,Bのx成分

$$f_{00} = \partial_0 A_0 - \partial_0 A_a = 0$$

$$f_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{1}{c}E_x$$

$$f_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = B_z$$

行列表記すると

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(11.8)

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

ポテンシャルを使わないでMaxwell方程式を書き換えてみよう！

必要な式

$$
\begin{cases}
j^1 = j_x \\
j^2 = j_y \\
j^3 = j_z \\
j^0 = c\rho
\end{cases}
$$

$$f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$$

$$
f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\
\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\
\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\
\frac{1}{c}E_z & B_y & B_x & 0
\end{pmatrix}
$$

問題1

$f^{\mu\nu}$ を求めよ！

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

(3) $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(4) $\nabla \times \vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$

$\lambda = 0$ のとき

$$\partial_0 f^{00} + \partial_1 f^{01} + \partial_2 f^{02} + \partial_3 f^{03}$$
$$= 0 - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z\right)$$
$$= -\frac{1}{c}\nabla \cdot \vec{E}$$
$$= \mu_0 j^0 = \mu_0 c\rho$$

$\lambda = 1$ のとき

$$\partial_0 f^{10} + \partial_1 f^{11} + \partial_2 f^{12} + \partial_3 f^{13}$$
$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}E_x + \frac{\partial}{\partial y}B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_y$$
$$= \left[\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{E}\right]_x = \mu_0 j_x$$

$$\partial_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \qquad \textbf{(12.1)}$$

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

(1) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(2) $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$

(λ, μ, ν)の組み合わせが(1,2,3)のとき

$$\partial_1 f_{23} + \partial_2 f_{31} + \partial_3 f_{12} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = \nabla \cdot \vec{B}$$

(λ, μ, ν)が(0,1,2)(0,2,3)(0,3,1)のとき

$$\partial_0 f_{23} + \partial_2 f_{30} + \partial_3 f_{02} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} B_x + \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) = \frac{1}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} + \nabla \times \vec{E} \right]_x$$

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \quad \textbf{(12.2)}$$

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

ここで、前回出てきたデュアルなテンソル密度を使うと(16)は

$$\partial_\nu * f^{\lambda\nu} = 0 \qquad \textbf{(12.3)}$$

$$* f^{01} = f_{23}$$

$$* f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z & \frac{1}{c}E_y \\ -B_y & \frac{1}{c}E_z & 0 & -\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & -\frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_x & 0 \end{pmatrix}$$

(12.1,3)が、Maxwell方程式を相対論的に書き換えた、よく似た式になる

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\lambda \qquad (12.4.a)$$

$$\partial_\nu * f^{\lambda\nu} = 0 \qquad (12.4.b)$$

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

電磁場のエネルギー、運動量を考える

(12.1)式

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 j^\lambda$$

(12.4.a)式をいろいろ変形してみると

$$\partial_\nu \left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \delta^\nu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\varepsilon\beta} \right) = \mu_0 j^\lambda f_{\lambda\rho} \quad \textbf{(12.8)}$$

となる。

$$T^\nu{}_\rho \equiv -\frac{1}{\mu_0} \left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \delta^\nu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \quad \textbf{(12.9)}$$

とおくと

(12.8)は

$$\partial_\nu T^\nu{}_\rho = f_{\rho\lambda} j^\lambda \quad \textbf{(12.8)'}$$

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

(12.9)式にηをかけて下つき添え字を上げると

(12.9)式

$$T^{\nu}{}_{\rho} \equiv -\frac{1}{\mu_0}\left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4}\delta^{\nu}{}_{\rho} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right)$$

$$\eta^{\rho\mu} f_{\lambda\rho} = f_{\lambda}{}^{\mu} = \eta^{\lambda\sigma} f^{\sigma\mu}$$

$$\eta^{\rho\mu}\delta^{\nu}{}_{\rho} = \eta^{\nu\mu}$$

となるから

$$T^{\nu\mu} = \eta^{\rho\mu} T^{\nu}{}_{\rho} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\eta^{\lambda\rho} f^{\lambda\nu} f^{\sigma\mu} - \frac{1}{4}\eta^{\nu\mu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \quad \textbf{(12.9)'}$$

電磁場のエネルギー運動量テンソルという

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

(12.9)'を頑張って計算すると次のようになる

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -w & -cg_x & -cg_y & -cg_z \\ -\frac{1}{c}S_x & M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ -\frac{1}{c}S_y & M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ -\frac{1}{c}S_z & M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{(12.9)''}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2\right)$$

電磁場のエネルギー密度

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right)$$

電磁場の運動量密度

$$\vec{S} = \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)$$

電磁場のエネルギーの流れの密度(ポインティングベクトル)

$$M_{ik} = \varepsilon_0 E_i E_k + \mu_0 H_i H_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2\right)$$

電磁場の張力テンソル

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

(12.9)からT$^{\nu}{}_{\rho}$を求めて(12.8)'式に代入すると

(12.8)'式 $\partial_{\nu} T^{\nu}{}_{\rho} = f_{\rho\lambda} j^{\lambda}$

$$\rho = 0$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S} + \left(\vec{E} \cdot \vec{j}\right) \qquad \textbf{(12.10.a)}$$

$$\rho = 1,2,3$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = \sum_{l=1}^{3} \partial_l M_{lk} - \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}\right)_k \qquad \textbf{(12.10.b)}$$

$$T^{\nu}{}_{\rho} = \begin{pmatrix} w & -cg_x & -cg_y & -cg_z \\ \frac{1}{c}S_x & M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ \frac{1}{c}S_y & M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ \frac{1}{c}S_z & M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$$

(12.10.1,b)を領域Vで積分してみよう！（ガウスの定理を使うよ）

ガウスの定理の復習

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_F \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}$$

体積積分　　面積分

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

$$-\frac{d}{dt}\int_V wd^3x = \int_F \vec{S}\cdot d\vec{\sigma} + \int_V \left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right) d^3x \quad \textbf{(12.10.a)'}$$

単位時間当たりにVの中の電荷に電場が与える仕事

表面Fから単位時間当たりに逃げ出すエネルギー量

Vの中の電磁場のエネルギーの減少率

$$\frac{d}{dt}\int_V g_k d^3x = \sum_{l-1}^{3}\int_F M_{kl}\, d\sigma_l - \int_V \left(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}\right)_k d^3x \quad \textbf{(12.10.b)'}$$

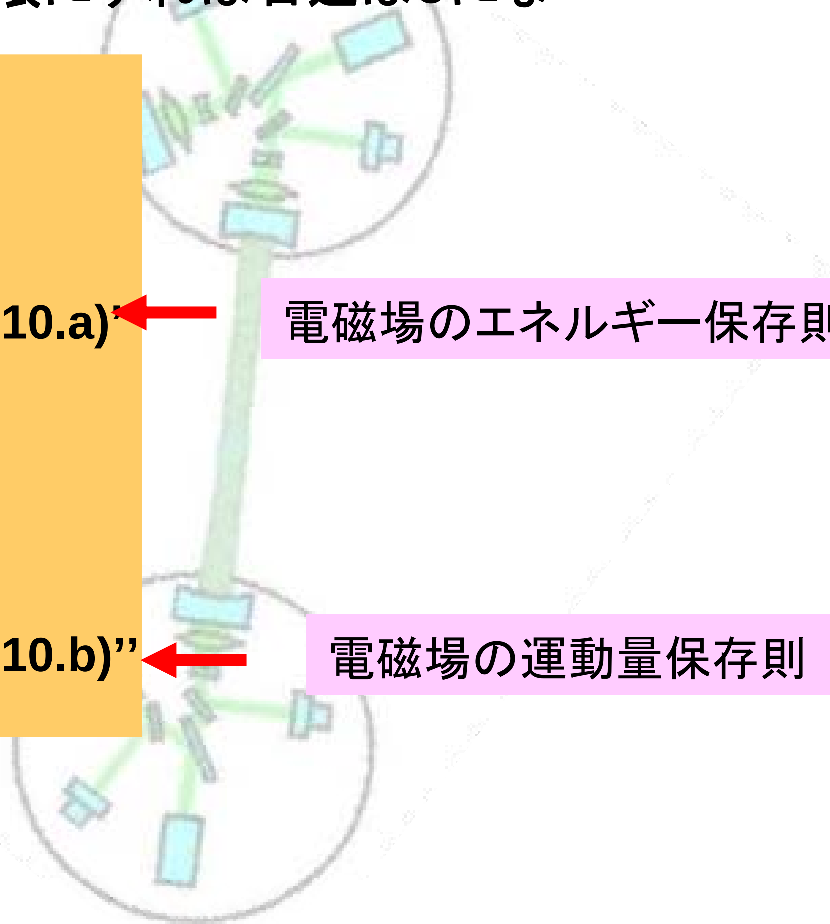
電磁場が電荷から受ける力

V外部の電磁場がVに与える電磁的張力

V中の電磁場のもつ運動量の増加率

Maxwell方程式の相対論的書き換え②

$\rho = 0, \vec{j} = 0$ で、遠方に行くにしたがって電磁場(E,B)が十分早く0になる場合、(25)(26)はVを無限にすれば右辺は0になる



$$-\frac{d}{dt}\int_V w d^3x = 0$$

$$\Rightarrow -\int_{-\infty}^{\infty} w d^3x = const \equiv P_0 \qquad \text{(12.10.a)'}$$

電磁場のエネルギー保存則

$$\frac{d}{dt}\int_V g_k d^3x = 0$$

$$\Rightarrow c\int_{-\infty}^{\infty} g_k d^3x = const \equiv P_k \qquad \text{(12.10.b)''}$$

電磁場の運動量保存則

これで終わり☆問題やろう！

もんだい壱

$f^{\mu\nu}$ を求めよ！

$$
f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}
$$

もんだい壱　　ひんと＆こたえ

ひんと

$$f^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} f_{\lambda\rho} \eta^{\nu\rho}$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

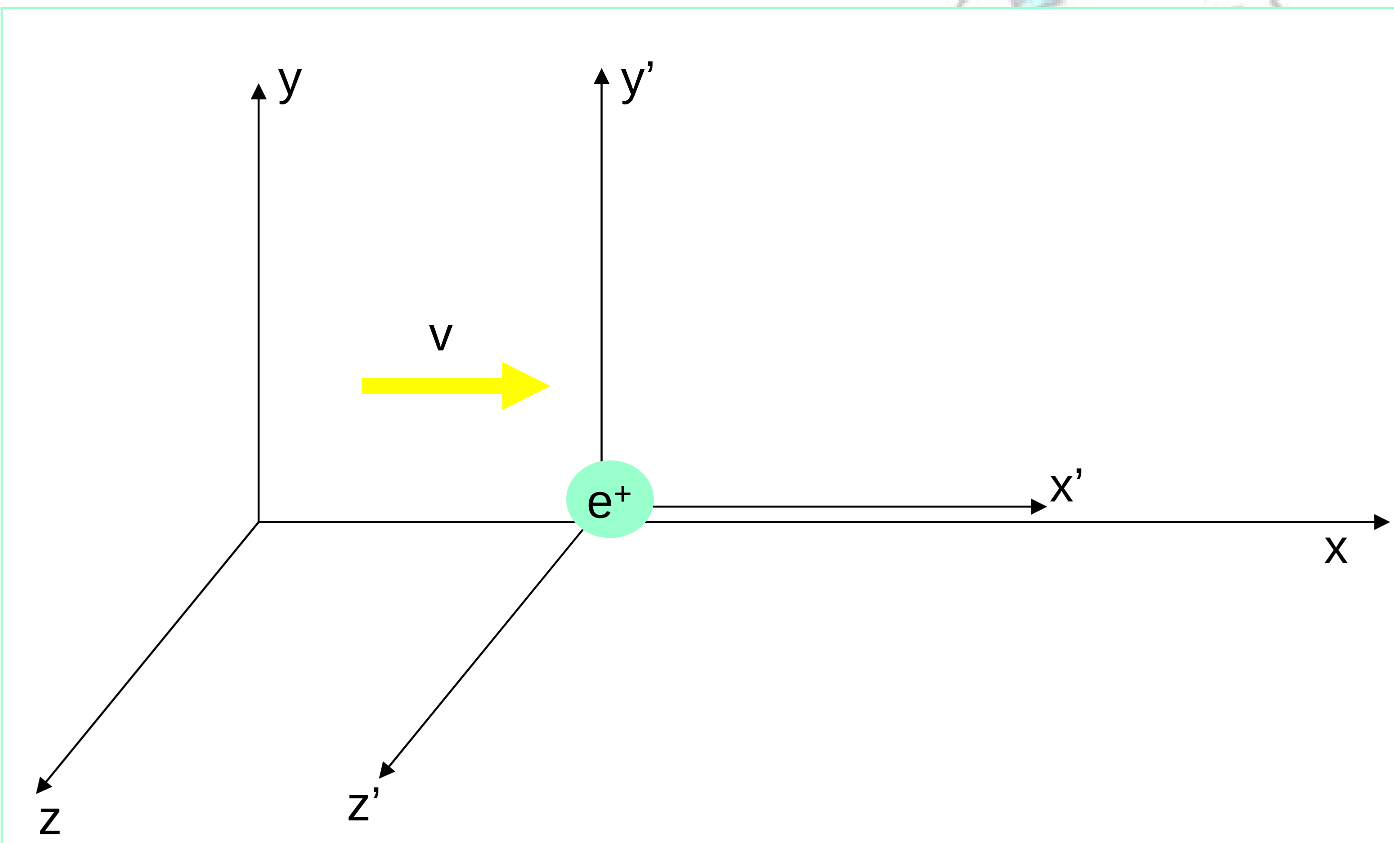
こたえ

$$f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

もんだい弐

運動している点電荷が作り出す電磁場を求めてみよう！！

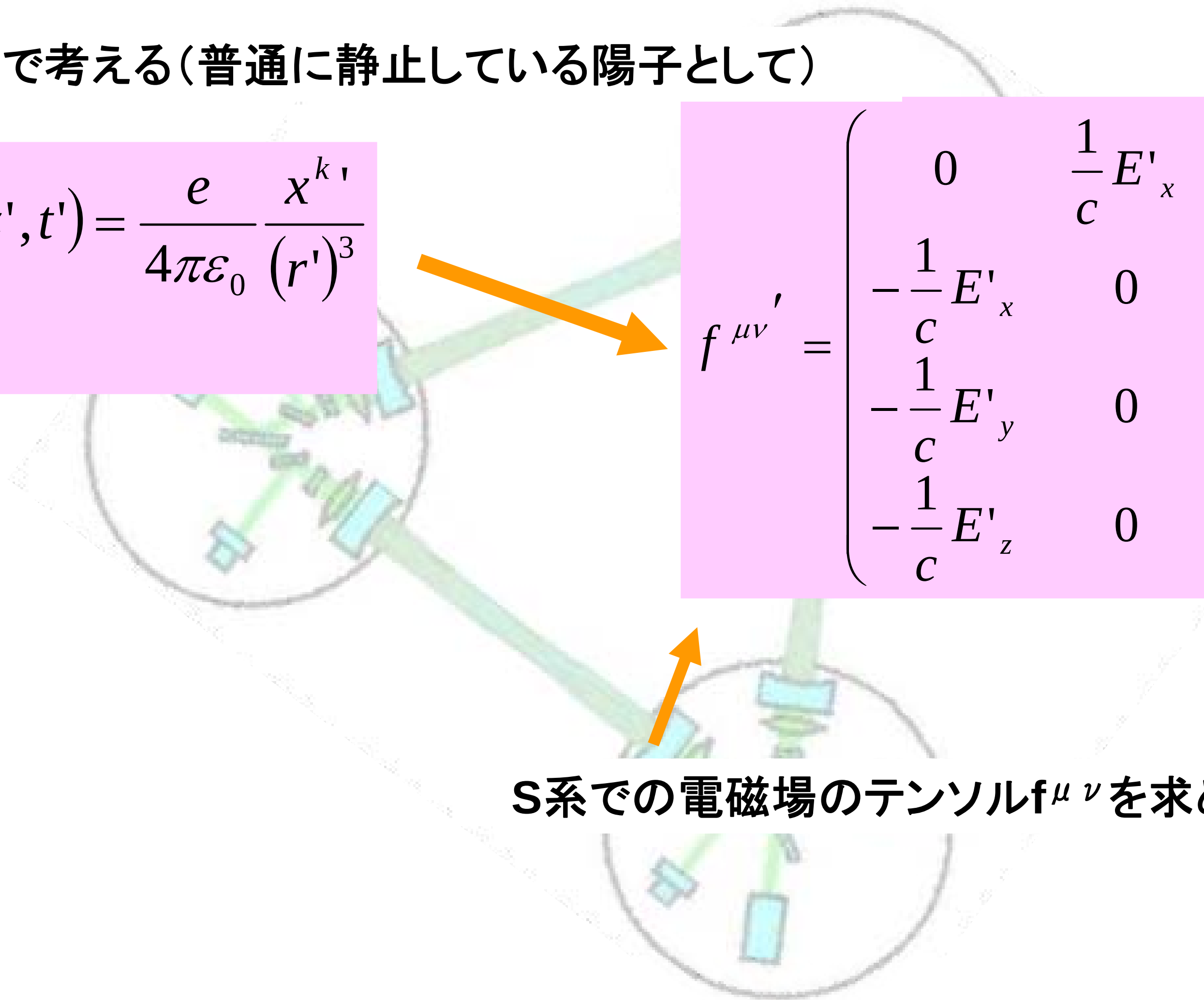
速度vでx軸方向に運動する陽子がつくる電磁場を求めよ！



もんだい弐　ヒント

教科書P76~77に全部載ってます（でも自分で計算してみて）

まずS’系で考える（普通に静止している陽子として）



$$E_k'(x',y',z',t') = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^{k}{}'}{(r')^3}$$

$$B_k' = 0$$

$$f^{\mu\nu}{}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E'_x & \frac{1}{c}E'_y & \frac{1}{c}E'_z \\ -\frac{1}{c}E'_x & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c}E'_y & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c}E'_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S系での電磁場のテンソル$f^{\mu\nu}$を求めてみよう

もんだい弐　ヒント

S系とS’系への変換は

$$x^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}{}'$$

$$a^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\lambda} f^{\lambda\rho}{}' a^{\nu}{}_{\rho}$$

$$= \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & f^{01}{}' & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{02}{}' & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{03}{}' \\ -f^{01}{}' & 0 & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{02}{}' & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{03}{}' \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{02}{}' & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{02}{}' & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{03}{}' & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} f^{03}{}' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

もんだい弐　　ヒント

$$f^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x{}' & \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_y{}' & \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_z{}' \\ -\frac{1}{c}E_x{}' & 0 & \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_y{}' & \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_z{}' \\ -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_y{}' & -\frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_y{}' & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_z{}' & -\frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}E_z{}' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

もんだい壱で求めた$f^{\mu\nu}$と
比較して

$$f^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

もんだい弐　こたえ

$$\vec{E} = \left(E_x{}', \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_y{}', \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_z{}' \right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}\,(r')^3}$$

$$\vec{B} = \left(0, -\frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} E_z{}', \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} E_y{}' \right) = \left(0, -\frac{v}{c^2} E_z, \frac{v}{c^2} E_y \right) = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$