

相対論ゼミ

34 Schwarzschild の特異点、 ブラックホール



ちんたん
2010/12/09

目標

Schwarzschildの解への理解を深める。
特に $r=4a$ における振る舞い。
外から見たり、落下物体から見たり、中から見たり、、、

Schwarzschild解

仮定1:すべてが球対称

仮定2:静的(重力場の時間変化がない)

→ 線素: $ds^2 = -A(dx^0)^2 + B\sum_{i=1}^3(dx^i)^2 \quad (33.1)$ 空間がどうなっているかを表す基本量

A, Bは r のみの関数



目標

Schwarzschildの解への理解を深める。
特に $r=4a$ における振る舞い。
外から見たり、落下物体から見たり、中から見たり、、、

Schwarzschild解

仮定1:すべてが球対称

仮定2:静的(重力場の時間変化がない)

➡ 線素: $ds^2 = -A(dx^0)^2 + B\sum_{i=1}^3(dx^i)^2$ (33.1) 空間がどうなっているかを表す基本量
A, Bはrのみの関数

➡ 計量テンソルとChristoffel記号: $g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ (33.1)' (33.2) これらがA, Bで表される

||➡ 作用積分IがA,Bで表せる: $I = \frac{1}{2c\kappa} \int G d^4x$ (33.3) $G = \frac{B'(2BA' + AB')}{2\sqrt{AB^2}}$ (33.4)

目標

Schwarzschildの解への理解を深める。
特に $r=4a$ における振る舞い。
外から見たり、落下物体から見たり、中から見たり、、、

Schwarzschild解

仮定1:すべてが球対称

仮定2:静的(重力場の時間変化がない)

➡ 線素: $ds^2 = -A(dx^0)^2 + B \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$ (33.1) 空間がどうなっているかを表す基本量
A, Bはrのみの関数

➡ 計量テンソルとChristoffel記号: $g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ (33.1)' (33.2) これらがA, Bで表される

➡ 作用積分IがA,Bで表せる: $I = \frac{1}{2c\kappa} \int \mathbf{G} d^4x$ (33.3) $\mathbf{G} = \frac{B'(2BA' + AB')}{2\sqrt{AB^2}}$ (33.4)

変分原理からA,Bが求まる

➡ $ds^2 = -\left(1 - \frac{4a}{r}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{4a}{r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 \{ (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \}$ (33.13)

Schwarzschildの厳密解

目標

Schwarzschildの解への理解を深める。
特に $r=4a$ における振る舞い。
外から見たり、落下物体から見たり、中から見たり、、、

Schwarzschild解

仮定1:すべてが球対称

仮定2:静的(重力場の時間変化がない)

➡ 線素: $ds^2 = -A(dx^0)^2 + B \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2$ (33.1) 空間がどうなっているかを表す基本量
A, Bはrのみの関数

➡ 計量テンソルとChristoffel記号: $g^{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ (33.1)' (33.2) これらがA, Bで表される

||➡ 作用積分IがA,Bで表せる: $I = \frac{1}{2c\kappa} \int \mathbf{G} d^4x$ (33.3) $\mathbf{G} = \frac{B'(2BA' + AB')}{2\sqrt{AB^2}}$ (33.4)

変分原理からA,Bが求まる

➡ $ds^2 = -\left(1 - \frac{4a}{r}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{4a}{r}\right)^{-1} (dr)^2 + r^2 \{ (d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \}$ (33.13)

Schwarzschildの厳密解

➡ 二つの特異点が存在: $r = 0, \quad r = 4a$

$r=4a$ は実は特異点(面)ではない！？

そもそも特異点とは？



$\frac{1}{0}$

的なものが現れて、よくわからなくなる点(領域)

Schwarzschildの厳密解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{4a}{r}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{4a}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2\} \quad (33.13)$$

特異点

$$r = 0, \quad r = 4a$$



$r=4a$ は実は特異点(面)ではない！？

そもそも特異点とは？



$\frac{1}{0}$

的なものが現れて、よくわからなくなる点(領域)

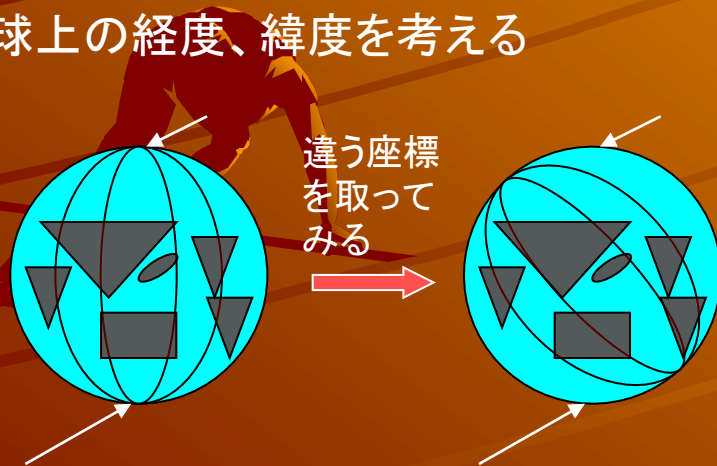
Schwarzschildの厳密解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{4a}{r}\right)(dx^0)^2 + \left(1 - \frac{4a}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \quad (33.13)$$

特異点

$$r = 0, \quad r = 4a$$

地球上の経度、緯度を考える



北極点と南極点では定義できない

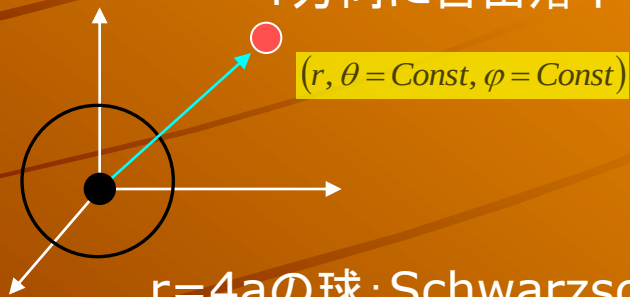
ここでの経度緯度が定義できるようになった

Schwarzschild解における $r=4a$ での特異点もこんな感じで、真の特異点ではない。

Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

今から考える状況:

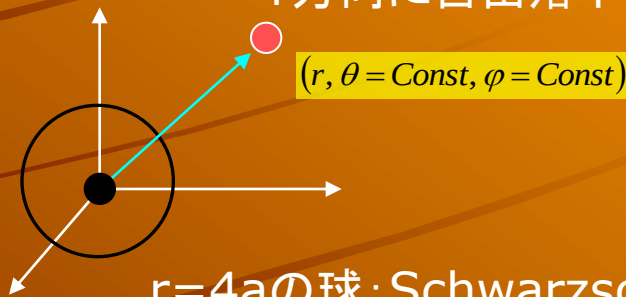
r方向に自由落下する物体を考える



Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

今から考える状況:

r方向に自由落下する物体を考える



作用積分:

$$I = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (26.3)'$$

$$= -mc \int \sqrt{A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2} d\tau \quad A = 1 - \frac{4a}{r}$$

$\because g^{\mu\nu}$ が式(33.1)'のように与えられている

17節によると

$$c^2 = A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2 \quad (34.1)$$

このIで変分を行うと、(久々に変分計算をやったらすっかりいろいろこんがらがっていた)

$$\frac{d}{d\tau} (2A\dot{x}^0) = 0 \quad (34.2)$$

$$A' \left\{ (\dot{x}^0)^2 + A^{-2}(\dot{r})^2 \right\} + 2 \frac{d}{d\tau} (A^{-1}\dot{r}) = 0 \quad (34.3) \quad \text{'}は} \frac{d}{dr}$$

運動方程式

得られた三つの式の中で独立なのは2つだけなので、(34.1)と(34.2)のみを使って計算を行っていく

Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

$$\frac{d}{d\tau}(2A\dot{x}^0)=0 \quad (34.2)$$

$$c^2 = A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2 \quad (34.1)$$

$$\cdot \text{は } \frac{d}{d\tau}$$



Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

$$\frac{d}{d\tau}(2A\dot{x}^0)=0 \quad (34.2)$$



$$A\dot{x}^0 = \left(1 - \frac{4a}{r}\right)c \frac{dt}{d\tau} = \text{Const.}$$



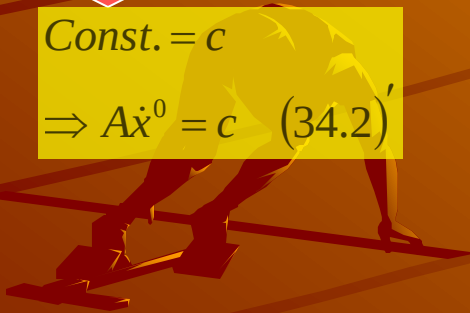
$r \rightarrow \infty$ を考えると、

$$\text{Const.} = c$$

$$\Rightarrow A\dot{x}^0 = c \quad (34.2)'$$

$$c^2 = A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2 \quad (34.1)$$

$$\cdot \text{は } \frac{d}{d\tau}$$



Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

$$\frac{d}{d\tau}(2A\dot{x}^0)=0 \quad (34.2)$$

$$c^2 = A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2 \quad (34.1)$$

$$\cdot \text{は } \frac{d}{d\tau}$$

$$A\dot{x}^0 = \left(1 - \frac{4a}{r}\right)c \frac{dt}{d\tau} = \text{Const.}$$

$$\frac{dr}{cdr} = \frac{\dot{r}}{\dot{x}^0} = -\sqrt{\frac{4a}{r}} \left(1 - \frac{4a}{r}\right) \quad (34.4)$$

↓ $r \rightarrow \infty$ を考えると、
 $\text{Const.} = c$

$$\Rightarrow A\dot{x}^0 = c \quad (34.2)'$$

代入

$$\begin{aligned} r &= r_1 > 4a & (t=0) \\ r &= r > 4a & (t=t) \end{aligned}$$

$$ct = \frac{2}{3\sqrt{4a}} \left\{ r_1^{3/2} - r^{3/2} + 12a(\sqrt{r_1} - \sqrt{r}) \right\} + 4a \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{4a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{4a})}{(\sqrt{r} - \sqrt{4a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{4a})}$$

これは落下物体の位置rと時間tの関係

Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

$$ct = \frac{2}{3\sqrt{4a}} \left\{ r_1^{3/2} - r^{3/2} + 12a(\sqrt{r_1} - \sqrt{r}) \right\} + 4a \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{4a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{4a})}{(\sqrt{r} - \sqrt{4a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{4a})}$$



これは落下物体の位置 r と時間 t の関係

$r=4a$ での振舞いを考える



右辺は極限的には無限になる



Schwarzschild時空内の物体の落下 (遠くから落下物を見る:tで表す)

$$ct = \frac{2}{3\sqrt{4a}} \left\{ r_1^{3/2} - r^{3/2} + 12a(\sqrt{r_1} - \sqrt{r}) \right\} + 4a \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{4a})(\sqrt{r_1} - \sqrt{4a})}{(\sqrt{r} - \sqrt{4a})(\sqrt{r_1} + \sqrt{4a})}$$



これは落下物体の位置rと時間tの関係

r=4aでの振舞いを考える
近似すると、



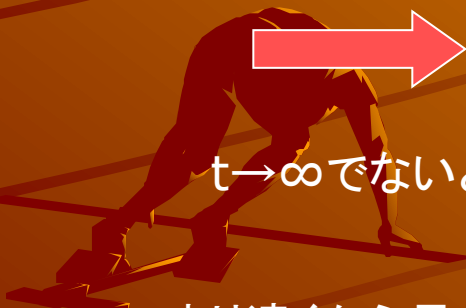
右辺は極限的には無限になる



$$r - 4a \cong 16a \exp\left(-\frac{ct}{4a}\right)$$

t→∞でないと落下物体は障壁(r=4a)につかない。

つまり遠くから見ている人にとしてみると、いつまで経っても4aに到達しない



Schwarzschild時空内の物体の落下 (落下物から見る: τ で表す)

$$c^2 = A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2 \quad (34.1)$$

$$A\dot{x}^0 = c \quad (34.2)'$$

連立させると、



$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{\frac{4a}{r}} \quad (34.5)$$



Schwarzschild時空内の物体の落下 (落下物から見る: τ で表す)

$$c^2 = A(\dot{x}^0)^2 - A^{-1}(\dot{r})^2 \quad (34.1)$$

$$A\dot{x}^0 = c \quad (34.2)'$$

連立させると、



$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{\frac{4a}{r}} \quad (34.5)$$



$$r = r_1 \quad (t = 0) \quad : \text{初期条件をつけて積分する}$$

$$c\tau = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{4a}} (r_1^{3/2} - r^{3/2}) \quad (34.6)$$

$r=0$ 以外に特異点はない！



$$\tau_1 = \frac{2}{3c\sqrt{4a}} r_1^{3/2} \quad : r=0 \text{ になるまでの時間}$$

このように落下物からみた座標系であれば特異点は一つだけになる。



問題

太陽の質量が中心に集中したときを議論せよ

1. 遠くから見たときの特異面4aはどれくらいになりそうか。
2. 中心から1a.u.だけ離れたところから落下する物体は固有時間でどれくらいで中心に到達するか

$$a = \frac{GM}{2c^2} \quad (33.10)$$

$$\tau_1 = \frac{2}{3c\sqrt{4a}} r_1^{3/2}$$

$$r \cong 4a + 16a \exp\left(-\frac{ct}{4a}\right)$$

$$M_{sun} = 2.0 \times 10^{30} [kg]$$

$$G = 6.7 \times 10^{-11} [m^3 s^{-2} kg^{-1}]$$

$$c = 3.0 \times 10^8 [ms^{-1}]$$

$$a.u. = 1.5 \times 10^{11} [m]$$

問題

太陽の質量が中心に集中したときを議論せよ

1. 遠くから見たときの特異面 $4a$ はどれくらいになりそうか。
2. 中心から $1a.u.$ だけ離れたところから落下する物体は固有時間でどれくらいで中心に到達するか

$$4a = \frac{2GM}{c^2} = 3000 [m]$$

$$\tau_1 = \frac{2}{3c\sqrt{4a}} r_1^{3/2} = 2.4 \times 10^6 [s] = 27 [day]$$

$$\begin{aligned} r &\cong 4a + 16a \exp\left(-\frac{ct}{4a}\right) \\ &= 4a + 12[km] \end{aligned}$$

$$M_{sun} = 2.0 \times 10^{30} [kg]$$

$$G = 6.7 \times 10^{-11} [m^3 s^{-2} kg^{-1}]$$

$$c = 3.0 \times 10^8 [ms^{-1}]$$

$$a.u. = 1.5 \times 10^{11} [m]$$