

26 質点の運動方程式

第Ⅶ章 一般相対論的力学と 電磁気学

ちんたん

目標と復習

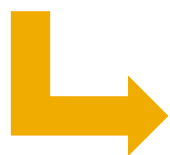
目標：

質量 m の質点が与えられた重力場のなかを運動しているときの運動方程式を求める。

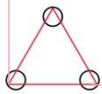
復習：

Lorentz系を考える。

線素： $\Delta s^2 = -c^2(\Delta\tau)^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu = -c(\Delta t)^2 + (\Delta\vec{x})^2$



固有時間： $(\Delta\tau)^2 = -\frac{1}{c^2}\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu$



重力場中の運動方程式の書き換え

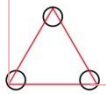
ある重力場内を考える

その中で測地的な座標系（局所Lorentz系）を設ける

$$\text{固有時間： } \Delta\tau^2 = -\frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \Delta X^\mu \Delta X^\nu$$

$$\text{運動方程式： } \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (26.1)$$

Xを一般座標系に変換し、この運動方程式を書きなおせばよい



重力場内における固有時間

$$\Delta\tau^2 = -\frac{1}{c^2}\eta_{\mu\nu}\Delta X^\mu\Delta X^\nu \qquad \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (26.1)$$

Minkowski空間内に任意の曲線座標 x^μ を設ける。

直線座標 X と曲線座標 x の関係は

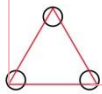
$$X^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

これを使って、(26.1)式を書きなおすと、

➡
$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$
 この x を x' にすれば一般座標変換に対して不変な運動方程式となる。

$$(ds)^2 = -(cd\tau)^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\rho dx^\sigma$$

➡
$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}$$



Christoffel記号の変形と運動方程式

Christoffel記号を導入すると、

24節

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}(x) &= -\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial X^{\beta}\partial X^{\gamma}} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial X^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \right) \frac{\partial X^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \frac{\partial^2 X^{\gamma}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \right) = \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial}{\partial X^{\beta}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \frac{\partial X^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \frac{\partial X^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \right) \frac{\partial X^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \left(\frac{\partial X^{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \right)$$

これは(19.9)式と同じ形

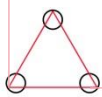


$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0$$

(26.2)

: 重力場内における
質量mの運動方程式

本来ならば第一項に慣性質量がかかり、第二項には重力質量がかかる



運動方程式の共変性

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (26.2)$$

この運動方程式が一般座標変換に対して形を変えないことを証明する。

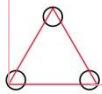
⇔ 運動方程式が共変である

時空内で速度ベクトル v を考える

$$v^\mu(\tau) \equiv v^\mu(x = x(\tau)) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \xrightarrow{\text{共変微分}} \nabla_\mu v^\lambda \equiv \frac{\partial v^\lambda(x)}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\nu$$

$$\begin{aligned} \text{ベクトル量} : v^\mu \nabla_\mu v^\lambda &= v^\mu \left[\frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\nu \right] = v^\mu \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\mu} + v^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\nu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} : \text{運動方程式} \end{aligned}$$

運動方程式がベクトル的なので、共変である。



Hamiltonの原理から導く運動方程式

特殊相対論での運動方程式は作用積分

$$I = -mc \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\lambda} \frac{dX^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (26.3)$$

をXについて変分してもとめた。

一般相対論でも同様にして、この式を一般座標に書き変えて、変分を行う。

$$I = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (26.3)$$

変分！
⇒

$$\left\{ -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{1}{2\sqrt{A}} \right\} - \frac{d}{d\lambda} \left\{ -2g_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{1}{2\sqrt{A}} \right\} = 0$$

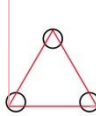
$$A = -g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

Λとしてτを選ぶ



$$g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

：これは先の運動方程式
と同じらしい



運動方程式の意味

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (26.2)$$

この運動方程式で表わされる曲線を測地線という。

重力が弱いとして、線形近似する。

$$(i) \quad g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

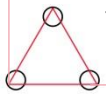
次に重力場は時間変化しないとする。（重力場は静的）

$$(ii) \quad g_{0k} = 0 \quad : g_{\mu\nu} \text{ は } x^0 \text{ に無関係}$$

最後に質点の運動がゆっくりであるとする。

$$(iii) \quad |\vec{v}| \ll c$$

この三つの近似を行って、得られる運動方程式とNewtonの運動方程式を比較してみる



運動方程式の意味

$$\frac{dx^k}{d\tau} \approx \frac{dx^k}{dt} \equiv v^k \ll c, \quad \frac{dx^0}{d\tau} \approx \frac{dx^0}{dt} = c$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (26.2)$$

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{2} \partial_k h_{00}, \quad \Gamma_{0l}^k = 0,$$

$$\Gamma_{0k}^0 = -\frac{1}{2} \partial_k h_{00}, \quad \Gamma_{00}^0 = 0$$

2次までの近似をする

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{00}^k \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 x^k}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_k h_{00} = 0$$

Newtonの方程式：

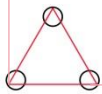
$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \partial_k \phi = 0$$

左二つの式が同じなら

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \phi \Leftrightarrow g_{00} = -\left(1 + \frac{2}{c^2} \phi\right)$$



Newtonの法則はEinsteinの運動方程式の特別な場合



運動方程式の時間成分

時間成分 $\lambda = 0$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (26.2) \quad \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} c \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{dx^0}{d\tau} - c h_{00} \{ \vec{x}(\tau) \} \right] = 0$$

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2} \phi \Leftrightarrow g_{00} = -\left(1 + \frac{2}{c^2} \phi \right)$$


$$E = mc \frac{dx^0}{d\tau} - mc^2 h_{00} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} + 2m\phi \{ \vec{x}(\tau) \}$$

質点の世界線に沿って一定である

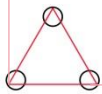
さらに静的重力場なら、

$$c^2 d\tau^2 = -c^2 g_{00} dt^2 - \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx^i dx^k$$



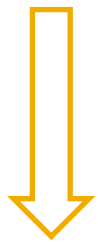
問題

$$\frac{dt}{d\tau} \approx 1 - \frac{1}{c^2} \phi + \frac{v^2}{2c^2}$$



運動方程式の時間成分

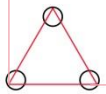
$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau} + 2m\phi\{\vec{x}(\tau)\}$$



$$\frac{dt}{d\tau} \approx 1 - \frac{1}{c^2}\phi + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + m\phi\{\vec{x}(\tau)\} = \text{Const.}$$

： Newton力学において、重力ポテンシャル下でのエネルギー



光線について

測地系での光線の方程式は

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\lambda^2} = 0, \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = 0$$

λ は光の軌道を表わすパラメータ

一般座標系からみると、、、

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0,$$

$$\left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

変分

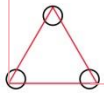


$$I' = \int g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda$$



さっきと少し違う

$$I = -mc \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (26.3)$$

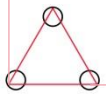


問題

$$c^2 d\tau^2 = -c^2 g_{00} dt^2 - \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx^i dx^k$$



$$\frac{dt}{d\tau} \approx 1 - \frac{1}{c^2} \phi + \frac{v^2}{2c^2}$$



問題（ヒント）

$$c^2 d\tau^2 = -c^2 g_{00} dt^2 - \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx^i dx^k \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} \approx 1 - \frac{1}{c^2} \phi + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$(i) \quad g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

微小量三次以降を無視

