20 Riemann空間
21 テンソル、テンソル密度
22 積分、Stokesの定理、Gaussの定理

第VI章Reimann空間におけるテンソル解析

ちんたん

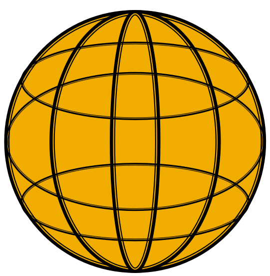
Rieman空間：座標の変換

時空を記述するのにどのような座標系の間の変換がどうなっているか。
またそれぞれのgの間の関係をみていく。

4次元時空の座標系の条件

1. 1価
2. 連続の条件

一つの座標系で全時空を覆い尽くせるとは限らない。



3次元球の表面を経線と子午線の座標で覆ってみる

北極と南極では、線が交わり、1価の条件を破る

極では違う座標系が必要 ➡ 座標系間の変換が気になるね

Rieman空間：座標の変換

$x^{\mu} \to x^{\mu}{}'$ という座標変換を考える

新旧座標間には次のような関係があり、fは必要な階数だけ微分可能とする

$$x^{\mu}{}' = f^{\mu}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv f^{\mu}(x)$$

3次元での例： $r = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4個の数が独立である条件：

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \equiv \det\left(\frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}\right) \neq 0$$

時空間の隣接した2点間の距離

S系から見て

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu}$$

S系から見て

$$ds^2 = g_{\mu\nu}{}'(x') dx^{\mu}{}' dx^{\nu}{}'$$

計量gの間の関係は

$$g_{\mu\nu}{}'(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\mu}{}'} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu}{}'} g_{\rho\sigma}(x)$$

Rieman空間：座標の変換

各々の座標系でのgの測り方

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

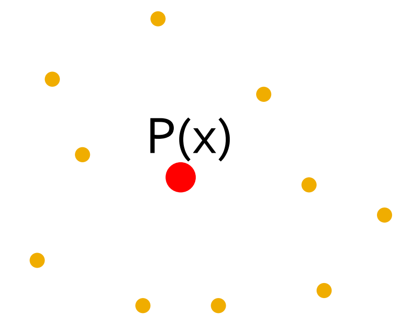
変数を10個含んでいる

ある点P(x)の周りに10個点をとる。
等価原理を使ってP近傍に局所Lorentz系を設ける。

各点とPの間の距離dsを測定

dsとdxの間に10個の独立な方程式ができる

g(x)の中身が解ける



各点とPの
距離を測定

g(x)が求まる

同様なことを点Pの位置を変えて行えば、全時空でのg(x)が求まる

任意の隣接した点の距離が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

で求まる。

Riemann空間

一般座標変換におけるテンソル

今考えている一般座標変換：$x^\mu \to x^{\mu}{}' = f^\mu\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv f^\mu(x)$

このfは一価で、連続であれば何でもよい。

$\dfrac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^\nu}$ は一般にはxの関数となる。

これだけに注意すればスカラー、ベクトル、テンソルの定義は以前のMinkowski空間とまったく一緒とすることができる

S系→S′系を考える。

$$C = C'$$

$$A^{\mu}{}' = \frac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^\nu} A^\nu$$

$$A_\mu{}' = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu}{}'} A_\nu$$

スカラー　反変ベクトル　共変ベクトル

$$T^{\lambda\mu\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}{}'(x') \equiv \frac{\partial x^{\lambda}{}'}{\partial x^a}\frac{\partial x^{\mu}{}'}{\partial x^b}\cdots\frac{\partial x^i}{\partial x^{\rho}{}'}\frac{\partial x^j}{\partial x^{\sigma}{}'}\cdots T^{ab\cdots}{}_{ij\cdots}(x)$$

テンソル

一般座標変換におけるテンソル密度

スカラー密度の変換則（Lorentz変換と同様）

$$\boldsymbol{S}'(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\boldsymbol{S}(x)$$

座標間のヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0\prime}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{1\prime}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{2\prime}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{3\prime}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{0\prime}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1\prime}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2\prime}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3\prime}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{0\prime}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1\prime}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2\prime}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3\prime}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{0\prime}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1\prime}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2\prime}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3\prime}} \end{vmatrix}$$

この変換をするものを
スカラー密度という

スカラー密度ってなんだっけ？

ある量Sの四次元時空内の積分を考える

$$J = \int_\Omega \boldsymbol{S}(x) d^4x$$

座標変換しても

$$\boldsymbol{S}'(x') d^4x' = \boldsymbol{S}(x) d^4x$$

と変換されるSをスカラー密度という。
ヤコビアンが含まれている感じ？

⇒ 計算上便利

ある2階共変テンソルを$A_{\mu\nu}(x)$とすれば

$$\boldsymbol{S}(x) \equiv \sqrt{\det(A_{\mu\nu})}$$

一般相対論で重要なのはA=gのとき ⇒ $\boldsymbol{S}(x) \equiv \sqrt{-g(x)}$

テンソル密度は $\boldsymbol{T}^{\cdots}{}_{\cdots} \equiv \sqrt{-g}\underbrace{T^{\cdots}{}_{\cdots}}_{\text{テンソル}}$ と定義される。

一般座標変換を用いた時の不変体積素片

一般座標変換x→x′に対して

$$\underbrace{\sqrt{-g'(x')}}_{\text{スカラー密度}}d^4x' = \sqrt{-g(x)}d^4x = \text{不変}$$

であるから、一般座標変換を用いた時の4次元不変体積素片は

$$\sqrt{-g(x)}d^4x$$

となる。

ベクトルの大きさ

ベクトルの大きさの2乗を次のように与える。

$$(A)^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)A^\nu(x)$$

Riemann空間では添え字の上げ下げはgによって行われるので、

$$(A)^2 = A_\mu(x)A^\mu(x)$$

となることが容易にわかる。

特殊相対論と同様に

$$(A)^2 = \begin{cases} >0 & \text{：空間的ベクトル} \\ =0 & \text{：ゼロベクトル} \\ <0 & \text{：時間的ベクトル} \end{cases}$$

Riemann空間で用いる座標系の制限

実際の時空では座標系に次のような制限がつく。

$$\left.\begin{aligned}
d_0x^\mu &= \left(dx^0 \neq 0, dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0\right)\\
d_1x^\mu &= \left(dx^1 \neq 0, dx^0 = dx^2 = dx^3 = 0\right)\\
d_2x^\mu &= \left(dx^2 \neq 0, dx^0 = dx^1 = dx^3 = 0\right)\\
d_3x^\mu &= \left(dx^3 \neq 0, dx^0 = dx^1 = dx^2 = 0\right)
\end{aligned}\right\}$$

つまり、d_0x^μ は常に時間的、他は常に空間的ベクトルでなくてはならない

$$\Rightarrow$$

$$g_{00}(x) < 0, \quad g_{ii}(x) > 0$$

$$\begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik} \\ g_{ki} & g_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad g(x) < 0$$

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

Riemann幾何学では各点ごとに、$\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$ が異なるので異なる点の間の和、差を求めることは無意味である。しかしスカラーだけは例外で、その積分は一般座標変換に対して不変な値を持つ。

$$I = \int_{\Omega} \boldsymbol{S}(x) d^4x = \int_{\Omega} S(x)\sqrt{-g(x)}\, d^4x \quad ：スカラー$$

スカラーの例

無限小ベクトル：$d_1x^{\mu},\quad d_2x^{\mu},\quad d_3x^{\mu}$

無限小面積素片：$d\sigma^{\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} d_1x^{\mu} & d_1x^{\mu} \\ d_2x^{\mu} & d_2x^{\mu} \end{vmatrix}$

無限小面積素片：$dv^{\lambda\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} d_1x^{\mu} & d_1x^{\mu} & d_1x^{\mu} \\ d_2x^{\mu} & d_2x^{\mu} & d_2x^{\mu} \\ d_3x^{\mu} & d_3x^{\mu} & d_3x^{\mu} \end{vmatrix}$

スカラー

$$\int A_{\mu} dx^{\mu},\quad \iint A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu},\quad \iiint T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu}$$

この三つのスカラーには
Stokesの定理、Gaussの定理
が成り立っている

積分、Stokesの定理、Gaussの定理

Stokesの定理

$$\frac{1}{2!}\iint_S f_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \oint_C A_\mu dx^\mu \qquad f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

3次元的Gaussの定理

$$\frac{1}{2!}\iint_S A_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{3!}\iiint_V F_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} \qquad F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}$$

4次元的Gaussの定理

$$\frac{1}{3!}\iiint_V T_{\lambda\mu\nu} dv^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4!}\int\cdots\int_\Omega W_{\rho\lambda\mu\nu} dw^{\rho\lambda\mu\nu}$$

$$W_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu}$$

ここにある式はいずれもスカラーで、任意の積分領域で成り立つ

⇒ 一般座標変換に対して不変

スカラー密度、ベクトル密度の作り方

任意のベクトル密度 $\boldsymbol{T}^{\rho}$

$$\partial_{\rho}\boldsymbol{T}^{\rho} = \text{スカラー密度}$$

任意の反対称反変テンソル密度 $\boldsymbol{A}^{\sigma\tau}$

$$\partial_{\tau}\boldsymbol{A}^{\sigma\tau} = \text{反変ベクトル密度}$$