

- 18.特殊相対性理論に対する反省、一般相対性原理
- 19.等価原理

第Ⅴ章 一般相対性理論

ちんたん

特殊相対性理論の欠点と加速系

特殊相対性理論の欠点

1. 慣性系のみを扱った理論
2. 重力(万有引力)を扱えない理論

} 実は密接な関係がある

加速系

特殊相対論では慣性系を使用して物理現象を記述した

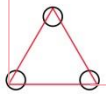


物理現象を記述するのに加速度運動をしている系でもよいはず



加速系

今から述べるように、実は使用する座標系が慣性系なのか加速系なのか識別することはできない

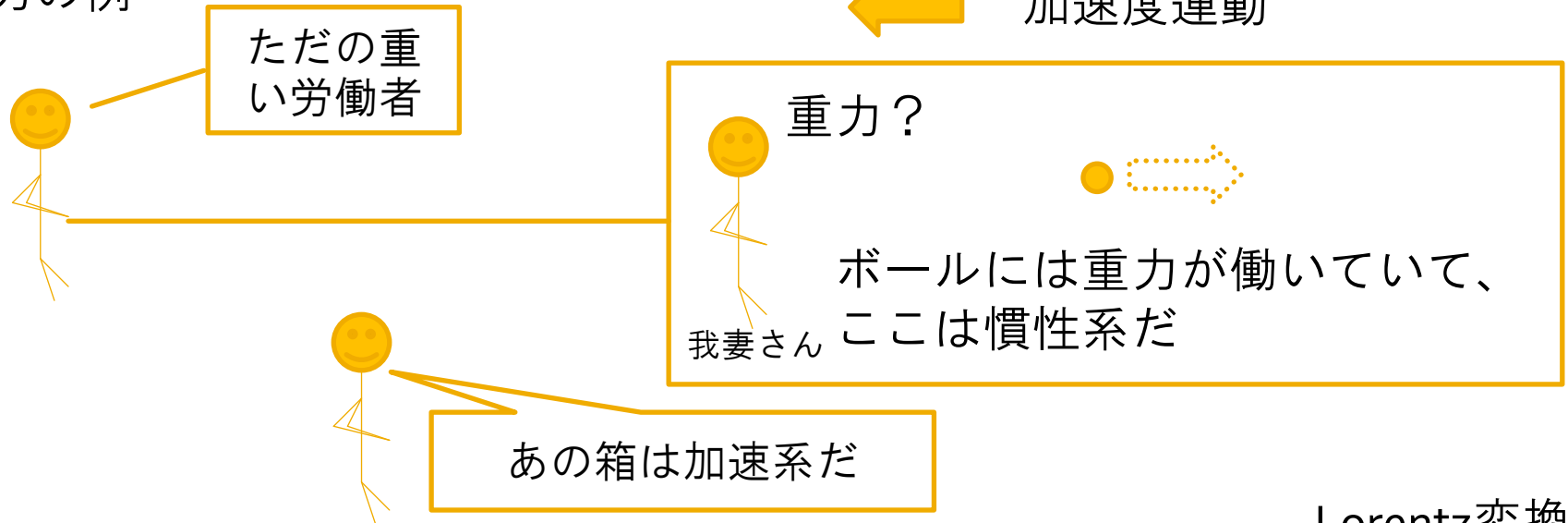


慣性系と加速系の識別

慣性系かどうかを識別

1. 外力が作用していなければ、質点は等速直線運動
2. 外力が作用していれば、それに比例した加速度運動

外力の例



Aさんは慣性系なのか加速系なのか識別がつかない。

重力と見かけの力の区別がつかない。

重力を扱うと、慣性系と加速系の区別がつかない。

Lorentz変換
→ 慣性系

一般的な座標変換
→ 非慣性系

一般相対性原理

アインシュタインの大胆さ

すべての物理法則はいかなる座標系を基準にとろうとも、全く同じ形式で書き表わされる



難しく言うと

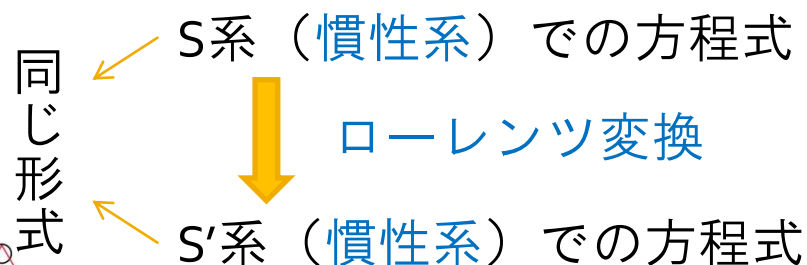
加速系も

物理法則はすべて一般座標変換に対して共変な形式に書き表わせる

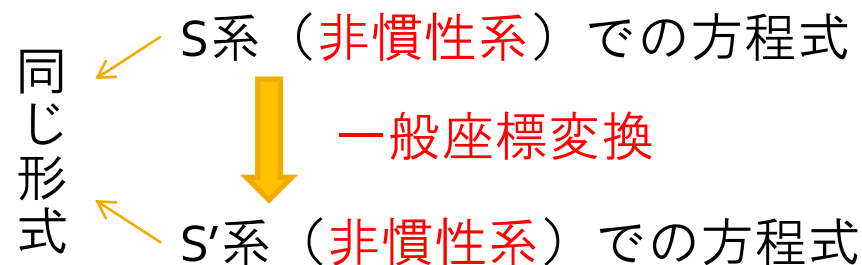


一般相対性原理

特殊相対性原理



一般相対性原理

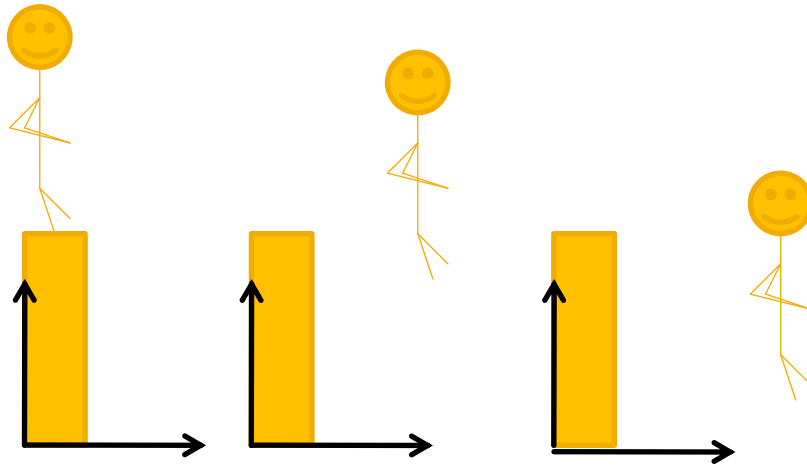


どんな座標系が使えるか

物理現象の観測とは

二つの事件の時間的、空間的位置の一致の確認

質点の運動



各時刻における質点の位置と座標面
(空間) に書かれた座標点の位置の一致



四つの数値(x^0, x^1, x^2, x^3) が必要

四つの数値(x^0, x^1, x^2, x^3) が同じなら一つの点である

四つの数値(x^0, x^1, x^2, x^3) は連続である

時刻の測定



一つの座標系での二つ事件の一致は、他の座標系から見ても一致している

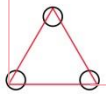


一価性



連続性

これを満たす
座標系ならOK



等価原理の必要性

一般相対性原理だけでは我々の経験と矛盾する

ボールは g で落ちているよ



S系



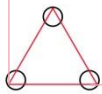
ボールは静止しているよ

S'系

自由落下による見かけの力を本物の力と考えればボールは静止できる

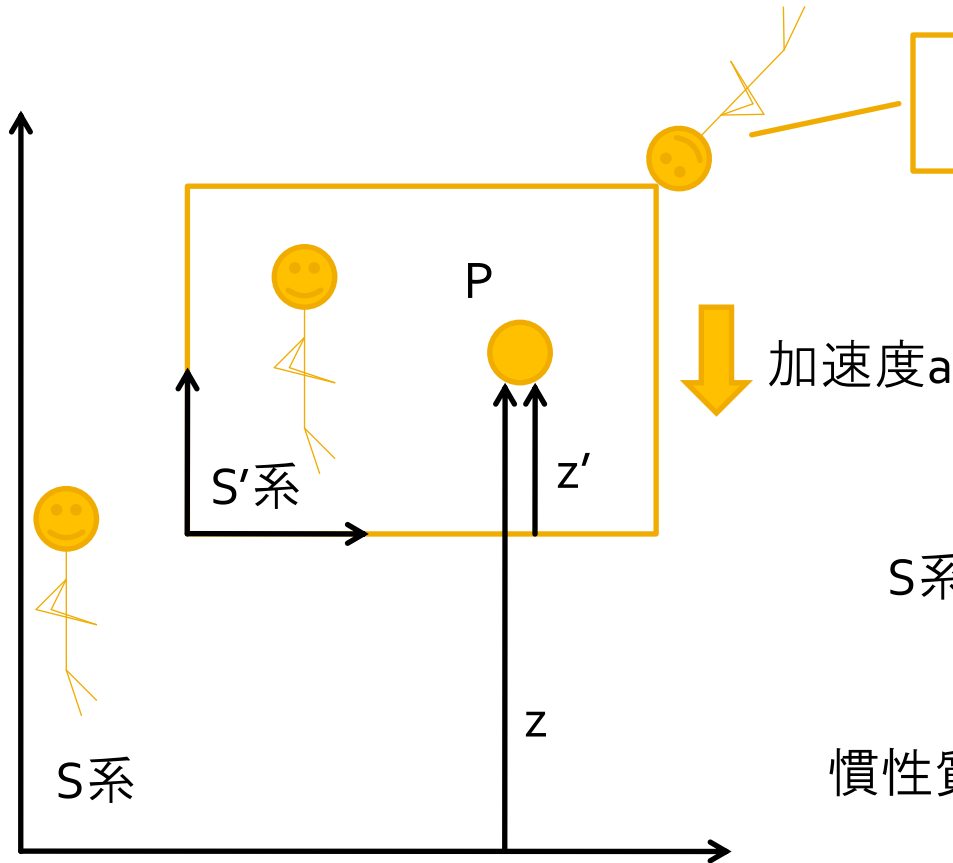
重力と見かけの力が相殺した結果、Aさんから見たボールは静止している
なぜ相殺できるのか？ ➡ 相殺できるということを原理としよう！

等価原理



等価原理

地球上（一様重力下）である箱を考える



ただの労働者
加速度aを作り出すために力を加える

Newton力学から

$$z' = z - \left(h - \frac{1}{2} at^2 \right)$$

S系からPを見ると

慣性質量

$$\underline{m_i} \frac{d^2 z}{dt^2} = -F$$

Pという質点の動きづらさを表わす

Fはこの場合重力で、経験によれば一定の数gと、物体に固有の数 m_G の積で書き表わせる

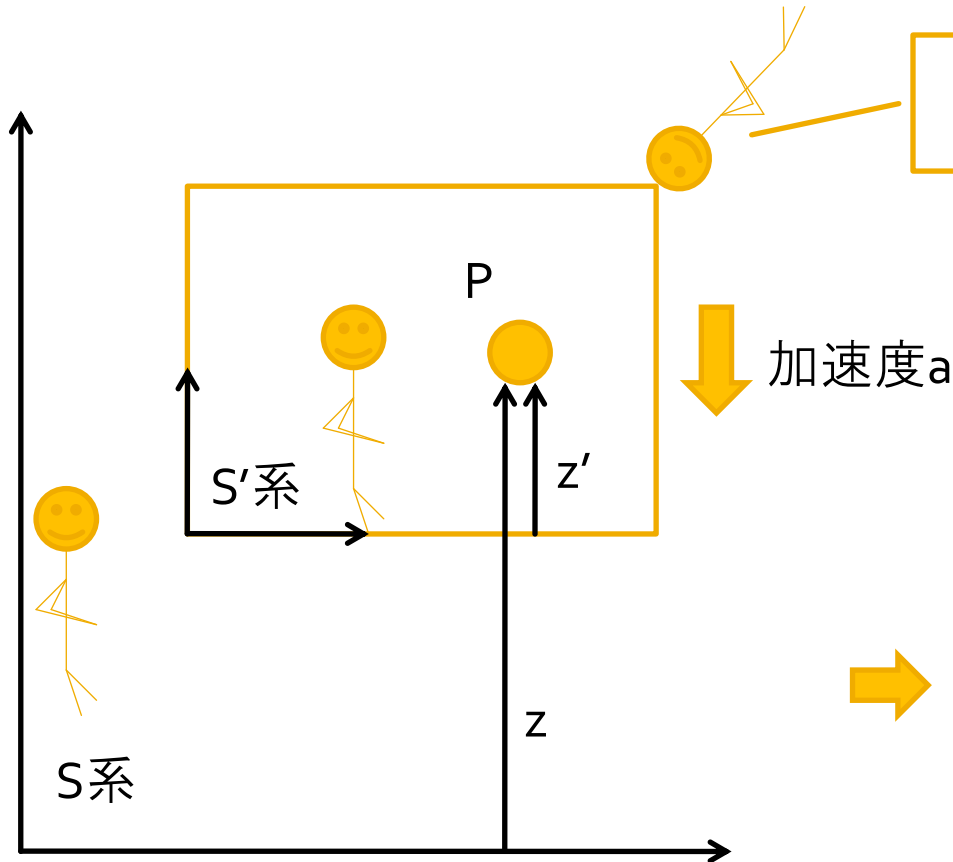
$$F = \underline{m_G} g$$

重力起源の質量

重力質量

等価原理

地球上（一様重力下）である箱を考える



たどの労働者
加速度 a を作り出すために力を加える

$$z' = z - \left(h - \frac{1}{2} a t^2 \right)$$

代入

$$m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = -F$$

$$F = m_G g$$

代入

➡ S'系から見たPの運動方程式

$$m_i \frac{d^2 z'}{dt^2} = -m_G g + m_i a$$

これが0になるように労働者が頑張って a を調節する

$$k \equiv \frac{m_G}{m_i} = \frac{a}{g} \quad : \text{Pだけでなく他の物体にも同じ} a \text{で成り立つ。}$$

➡ なぜだ！？

等価原理

このようにしてある適当な加速度をもった系内にいれば、力学的に重力がすべての物質において、打ち消すことができる。

Einsteinは力学だけでなく、一様な重力場では、適当な加速度運動をする座標系を基準にとることにより、**すべての物理現象に対する重力の作用を消滅させる**ことができると考えた

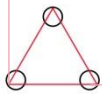
さらに時間的、空間的に非一様な重力場では、、、

重力場内の任意の点を取り囲む無限小の4次元領域を考えると、そこに特別な座標系を設け、これを基準にとる時、この**無限小領域内が無重力地帯となるようにすることが必ずできる**

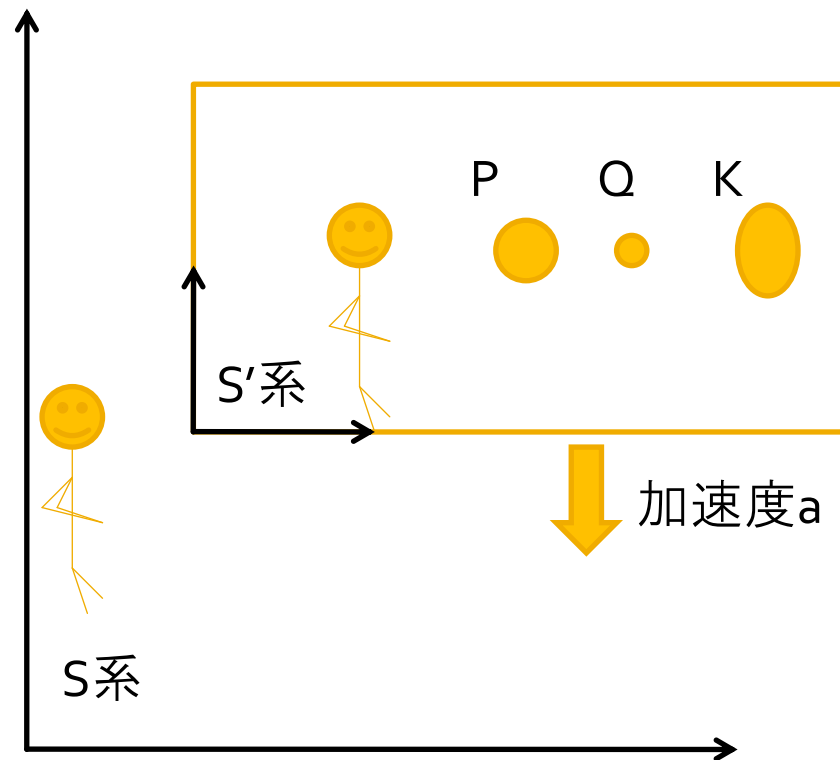
等価原理



どんな重力でも、観測者の加速度運動に由来する見かけの力（：慣性力）と原理的に区別がつかない



結局、等価原理とは



S'系からみたPが静止していれば、
QもKも静止している

$$k \equiv \frac{m_G}{m_i} \left(= \frac{a}{g} \right)$$

kがすべての物質について一定である。

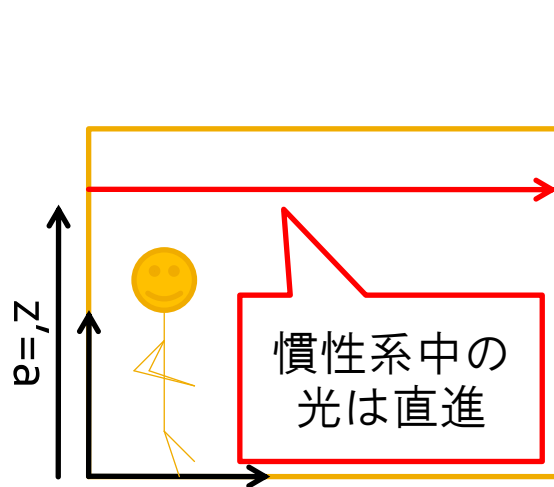
Dickeたちの実験（1960年代）

$$\frac{k(\text{Al})}{k(\text{Au})} = 1 + \eta \quad |\eta| < 3 \times 10^{-11}$$

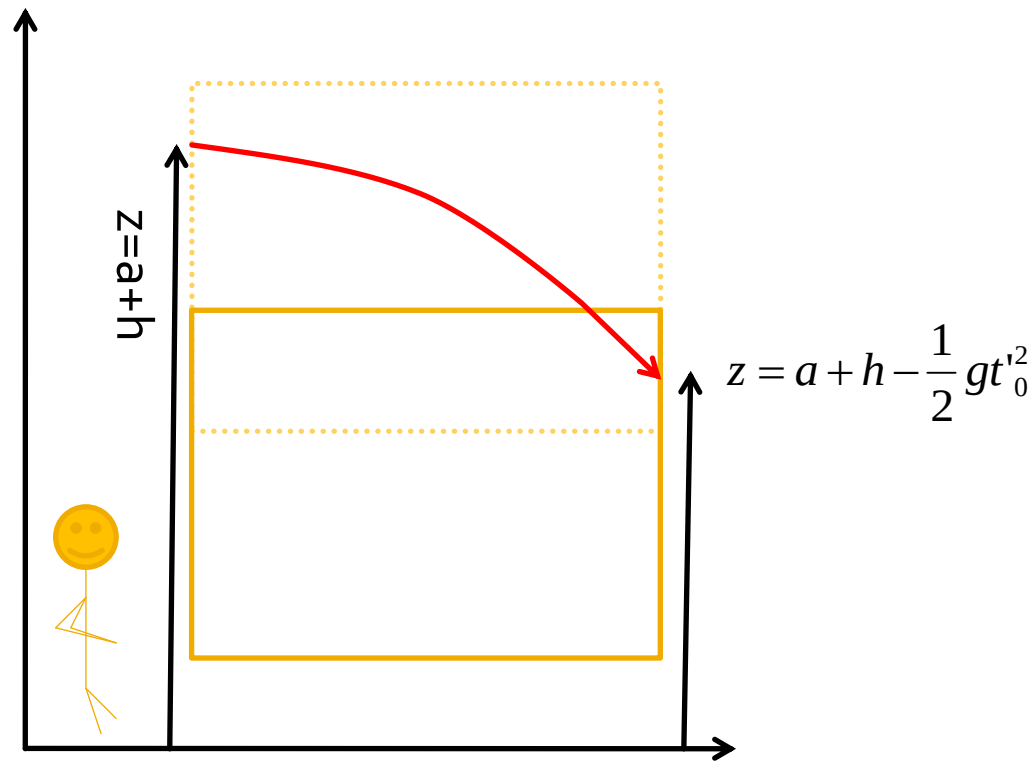
➡ $m_G = m_i$ としてよい

等価原理-箱の中の光-

自由落下中の箱の中と外からみたときの光の進むを考える。



自由落下中の箱の内部は無重力地帯



箱には重力が働いている

➡ 重力によって $gt^2/2$ の分だけ光が曲がった。

一般相対論では真空中の光速は一定ではなく、重力場の大小によって異なる

➡ 屈折率の変化と考えることもできる

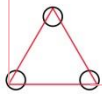
等価原理-距離の測定-

S系から見ると、光は4次元領域の中に曲線を描く

- ➡ S系では時空内の2点を結ぶ最短曲線は直線ではない。
- ➡ 重力場が存在する時空の領域では、成り立つ幾何学がMinkowski時空のと違う。
- ➡ 特殊相対論で述べた長さ、時間等の概念、その測定法は改める必要がある。

どうやって？

- ➡ 等価原理を使用して慣性系を作り特殊相対性理論を適応

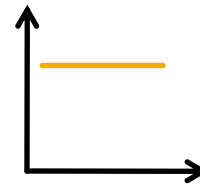


等価原理-局所Lorentz系-

等価原理

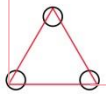
Ω の内部が無重力地帯となるような座標系 S' を設ける（加速度を持った系）

局所Lorentz系



S系：重力場が存在する

特殊相対性理論のすべての概念、測定法が使える。



等価原理-非慣性系における距離-

Ω 内にある近接した2点間の4次元的距離を求める。

S' 系は無重力であるから、

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu'} \Delta x^{\nu'}$$

S 系からみた問題の2点の座標 $x, x+\Delta x$ と S' 系での座標 $x', x'+\Delta x'$ に次のような関係があるとする

$$x^{\mu'} = f^{\mu'}(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta x^{\mu'} = \frac{\partial f^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \Delta x^{\nu}$$

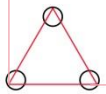
すると、

$$\Delta s^2 = g_{\mu\nu}(x) \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial f^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial f^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = g_{\nu\mu}(x)$$

となる。これで S 系での距離 ds が求まる。

$g_{\mu\nu}(x)$ ：計量テンソルについて
この g の中には重力場の情報
 $f(x)$ が含まれている。

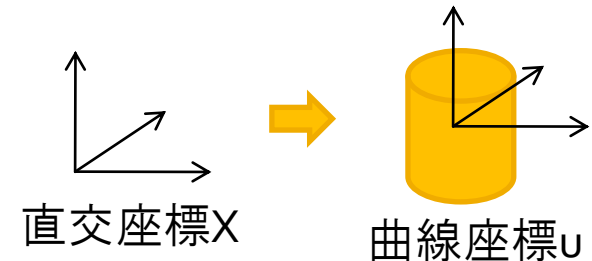


等価原理を使用しなくとも . . .

等価原理を使用しなくとも特殊相対論にでてきた法則を一般座標変換に対して不変な形に書くことは必ずしも不可能ではない。

外力の作用していない質点の運動方程式

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0$$



Minkowski空間内に任意の曲線座標 u^μ を設ける。直交座標 X と曲線座標 u の関係は

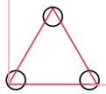
$$X^\mu = f^\mu(u^0, u^1, u^2, u^3)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial u^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial u^\rho \partial u^\sigma} \frac{du^\rho}{d\tau} \frac{du^\sigma}{d\tau} = 0$$

この u を u' にすれば一般座標変換に対して不変な運動方程式となる。

$$-(cd\tau)^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial u^\rho} \frac{\partial X^\nu}{\partial u^\sigma} du^\rho du^\sigma$$

これらはただ運動方程式を複雑に書いただけで、物理的には何も新しいものはない



等価原理を入れると

$$\frac{d^2 u^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial u^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial u^\rho \partial u^\sigma} \frac{du^\rho}{d\tau} \frac{du^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (19.8)'$$

この式に等価原理に従って、 $g_{\rho\sigma}$ を重力ポテンシャルとみなして、

$$g_{\rho\sigma}(u) = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial u^\rho} \frac{\partial X^\nu}{\partial u^\sigma}$$

： η からのずれ（重力）

とおくと、(19.8)'式は質点と重力の相互作用を示す法則にまで拡大される

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial u^\rho \partial u^\sigma} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right) \\ &\equiv \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \quad (19.9) \end{aligned}$$

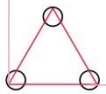
$$g^{\lambda\alpha}(u) \equiv \eta^{ij} \frac{\partial u^\lambda}{\partial X^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial X^j} = g^{\alpha\lambda}$$

$$g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta_\mu^\lambda$$

加速度

$$\frac{d^2 u^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \frac{du^\rho}{d\tau} \frac{du^\sigma}{d\tau} \quad (19.8)''$$

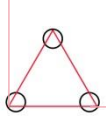
Γ は $\frac{\partial g}{\partial x}$ を含み、 g を重力ポテンシャルだと解釈すれば、この式の右辺は重力そのものを表わしている。



問題

一般相対性原理とは何か

等価原理とはなにか。証明にはどんな実験をすればよいのか。



問題

一般相対性原理とは何か

すべての物理法則は加速系を含めたいかなる座標系を基準にとろうとも、全く同じ形式で書き表わされる

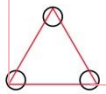
等価原理とはなにか。証明にはどんな実験をすればよいのか。

慣性質量と重力質量の比が常に一緒。

またこのことから、いかなる重力場でも適当な加速系に乗れば、重力をそっくりそのまま消すことができる。

自由落下中のエレベーターで各種の物質の加速度を測る

同じ質量の2つのおもりを天秤にかけ、重力加速度と地球の回転による加速度の違いで生じる天秤のねじれを利用して



ものぽり～

<http://tamago.mtk.nao.ac.jp/chen/report/mono.pdf>

