内山龍雄「相対性理論」輪講
2010/07/15(木)

特殊相対性理論の基礎

ちんたん

歴史的序論(Galilei変換のダメさ)

特殊相対論において、慣性系のみを扱う。

慣性の法則が成り立つ系

Newton力学：どの慣性系でも力学の法則は同じ形式に書き表わされる

慣性系間の書き換えの方法はGalilei変換

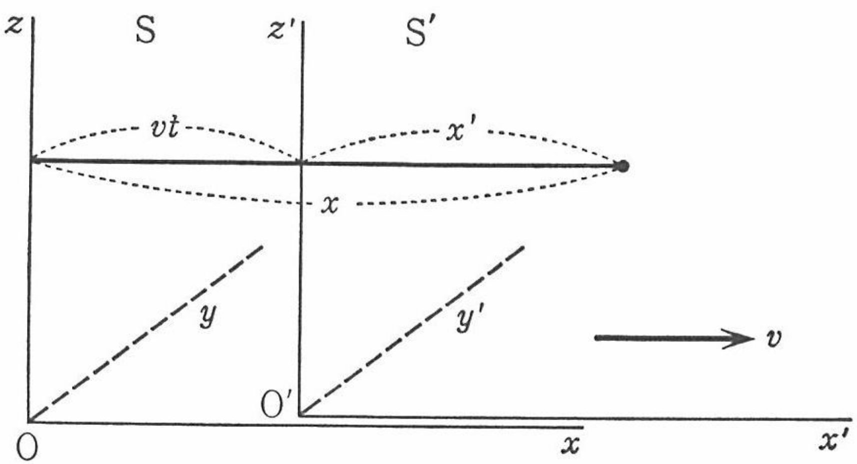


図 1

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.1)$$

力学では同じ形式

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f} \quad (1.3)$$

$$m\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{f}' \quad (1.3)$$

電磁気では違ってくる

歴史的序論(Galilei変換のダメさ)

電磁気学
Maxwell理論 ⇒ 光は真空中を$\underline{c = 3\times10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}}$ の速さで直進する。

誰からみた速さ？宇宙の重心G？

絶対系：Maxwellの理論が成り立つ慣性系

地球は固有運動しているから絶対系でなく、cはc-vとなっているはず

地球の絶対運動vを測定しよう：Michelson-Morleyの実験

$\boxed{\text{結論：絶対速度vは0もしくは非常に小さいであった。}}$

Newton力学を信じて電磁気学を疑った ⇒ 地球は宇宙の中心だった

Michelson-Morleyの実験

如何に地球の絶対速度vを測定したか。
地球はMM1の方向に一定の速さvで絶対運動しているとする。

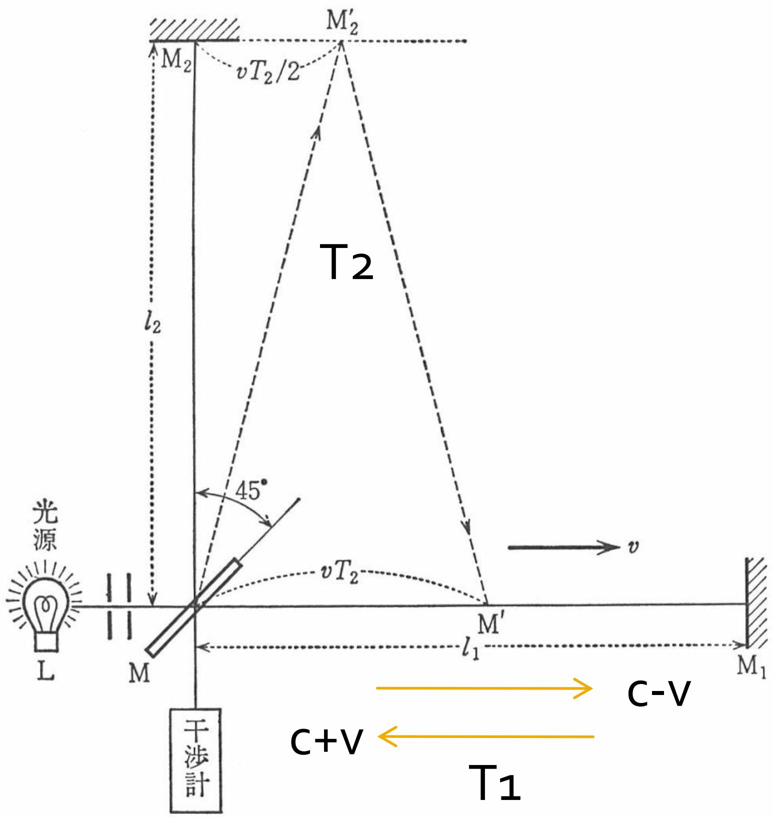


図 2

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1/c}{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$T_2 = \frac{2\sqrt{(l_2)^2 + \left(\frac{1}{2}vT_2\right)^2}}{c} \Rightarrow T_2 = 2\frac{l_2/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

L1とL2の光路差Δ

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2\left(\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

装置を90°回転させたときの光路差Δ′

$$\Delta' = c\left(T_1' - T_2'\right) = 2\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{1-\beta^2}\right)$$

ΔとΔ′の差δを観測する。

$$\delta = \Delta' - \Delta \approx -(l_1 + l_2)\beta^2$$

結果：δ=0→β=0

地球は宇宙の中心

Michelson-Morleyの実験

如何にこれを説明するか： Lorentz収縮

仮定：進行方向に対して $l_1 \to l_1\sqrt{1-\beta^2}$ の縮みが発生する。

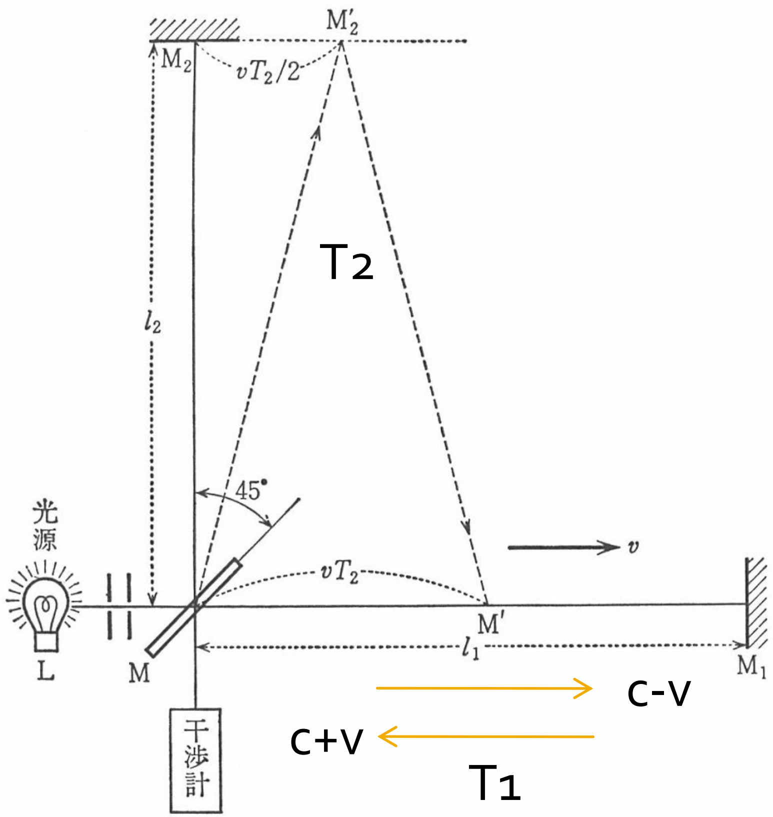


図 2

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2\left(\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Lorentz収縮

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2\left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0$$

cが変化してもδはoである

観測結果を説明できる

この仮定は不思議である。
これを如何に説明する？

Lorentz変換（特別な場合）

相対性原理
光速度不変の原理

SとS′の間を結ぶ関係式を求める

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.1)$$

$t = t' = 0$ に点O(O′)から光を放射→t秒後に点P(x,y,z)に到着

Pは S系に静止している

点Pに光が到着したときをS′系からみる：（x′,y′,z′,t′）

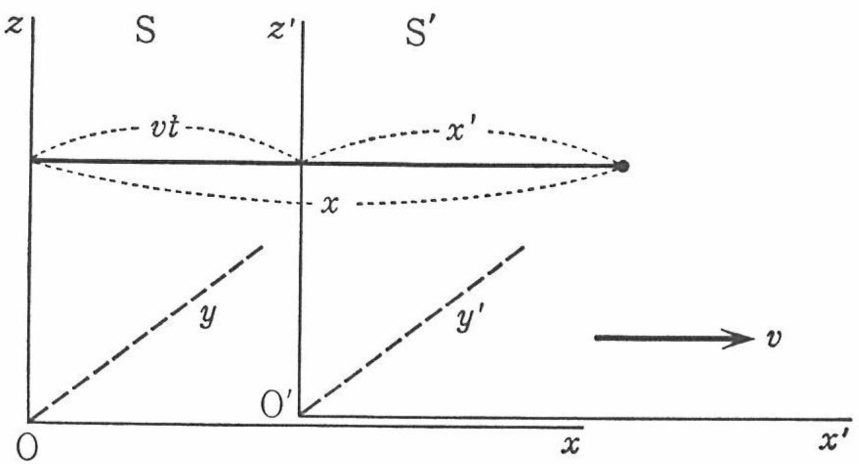


図 1

はじきより、次の式が成り立つ

S系 $s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \quad (3.1)$

S′系 $s'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0 \quad (3.1)'$

$$(x, y, z, t) \Longleftrightarrow (x', y', z', t')$$

関係式を導く

Lorentz変換（特別な場合）

S系で等速直線運動 ⇒ S′系で等速直線運動

⇒ x′, y′, z′, t′はx, y, z, tの一次関数

xy面とx′y′面
xz面とx′z′面
常に一致 ⇒ y′, z′はx, tの関数でない

対称性からκの関数形四つとも同じ形

$$y' = \kappa(v)y, \quad z' = \kappa(v)z \quad (3.2)$$

$$y = \kappa(-v)y', \quad z = \kappa(-v)z' \quad (3.2)'$$

連立させてκを解く

$$\kappa = \pm 1$$

v=oの極限を考えると

$$y' = y, \quad z' = z \quad (3.2)''$$

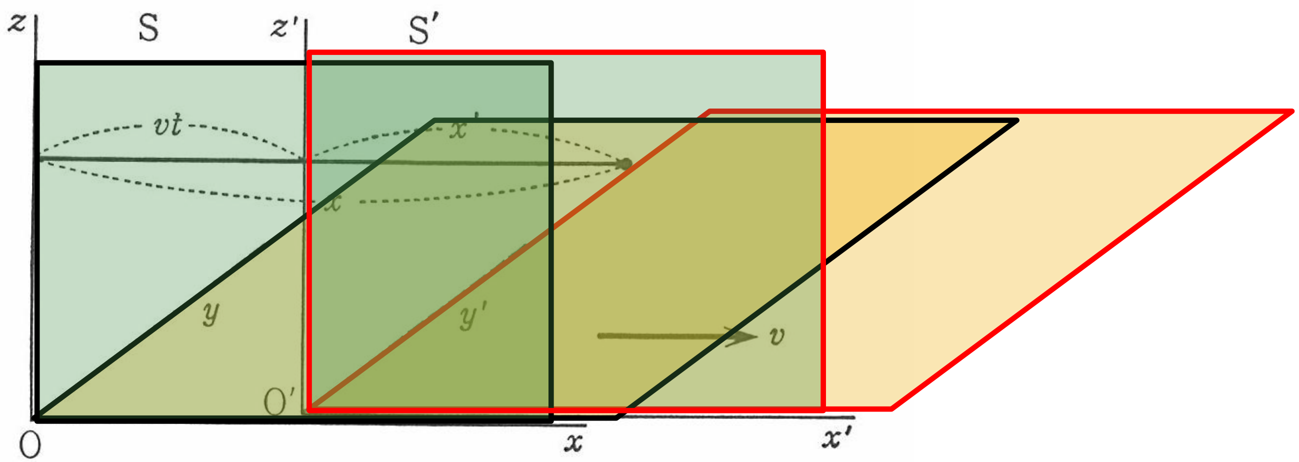


図 1

Lorentz変換（特別な場合）

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad (3.1) \quad \Longleftrightarrow \quad s'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \quad (3.1)'$$

s^2の変換も線形

$$s'^2 = \alpha(v) s^2$$

κとまったく同じ推論により

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = (s')^2 \quad (3.3)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (3.2)''$$

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (3.3)'$$

ここで、 $x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt \quad (3.4)$ とすると、a, b, f, gが求まる

Lorentz変換（特別な場合）

$x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt \quad (3.4)$ のa, b, f, gを求める

S′系の原点を考えて、

$$x' = 0 \Rightarrow \frac{x}{t} = v = -\frac{b}{a} \quad (3.5)$$

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (3.3)'$$

代入

$$x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt \quad (3.4)$$

$$x^2 - (ct)^2 = \left(a^2 - c^2 f^2\right)x^2 + \left(2ab - 2c^2 fg\right)xt + \left(b^2 - c^2 g^2\right)t^2$$

係数を合わせる

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (3.6)$$

Lorentz変換

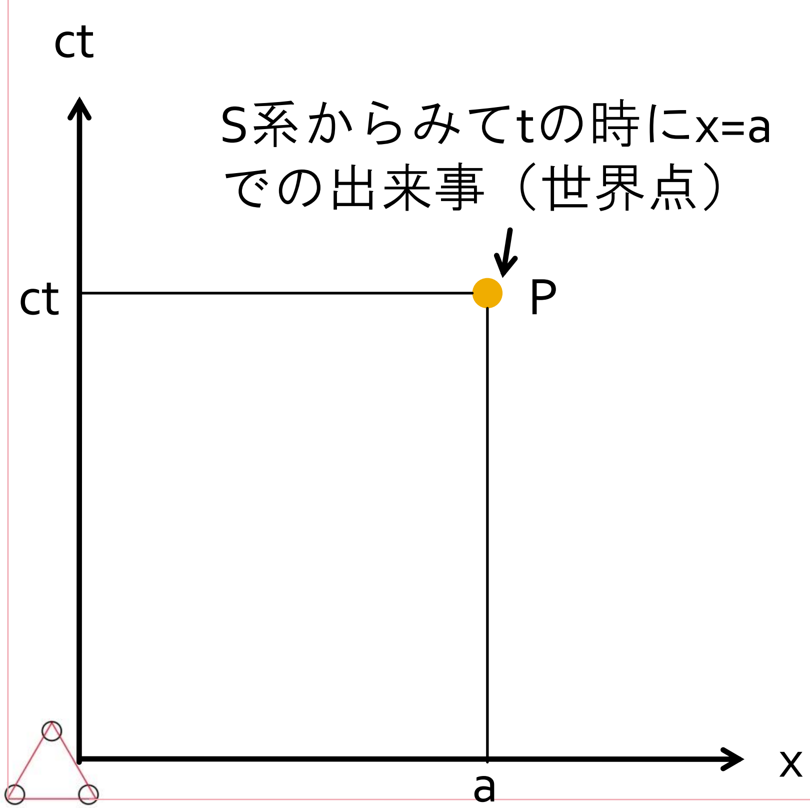
Lorentz変換からの二三の結果

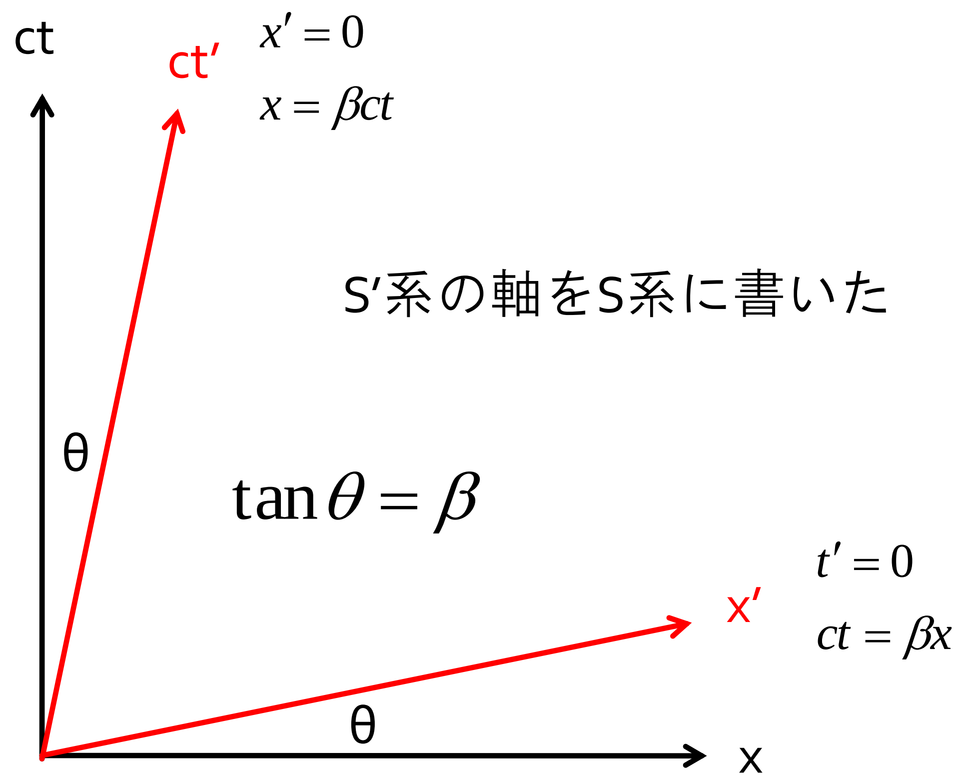
a.同時刻の相対性

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.6)$$

Lorentz変換から、「同時」というのは観測者のいる慣性系によって異なることがわかる

ミンコフスキー・ダイアグラム：横軸に空間、縦軸に時間×光速

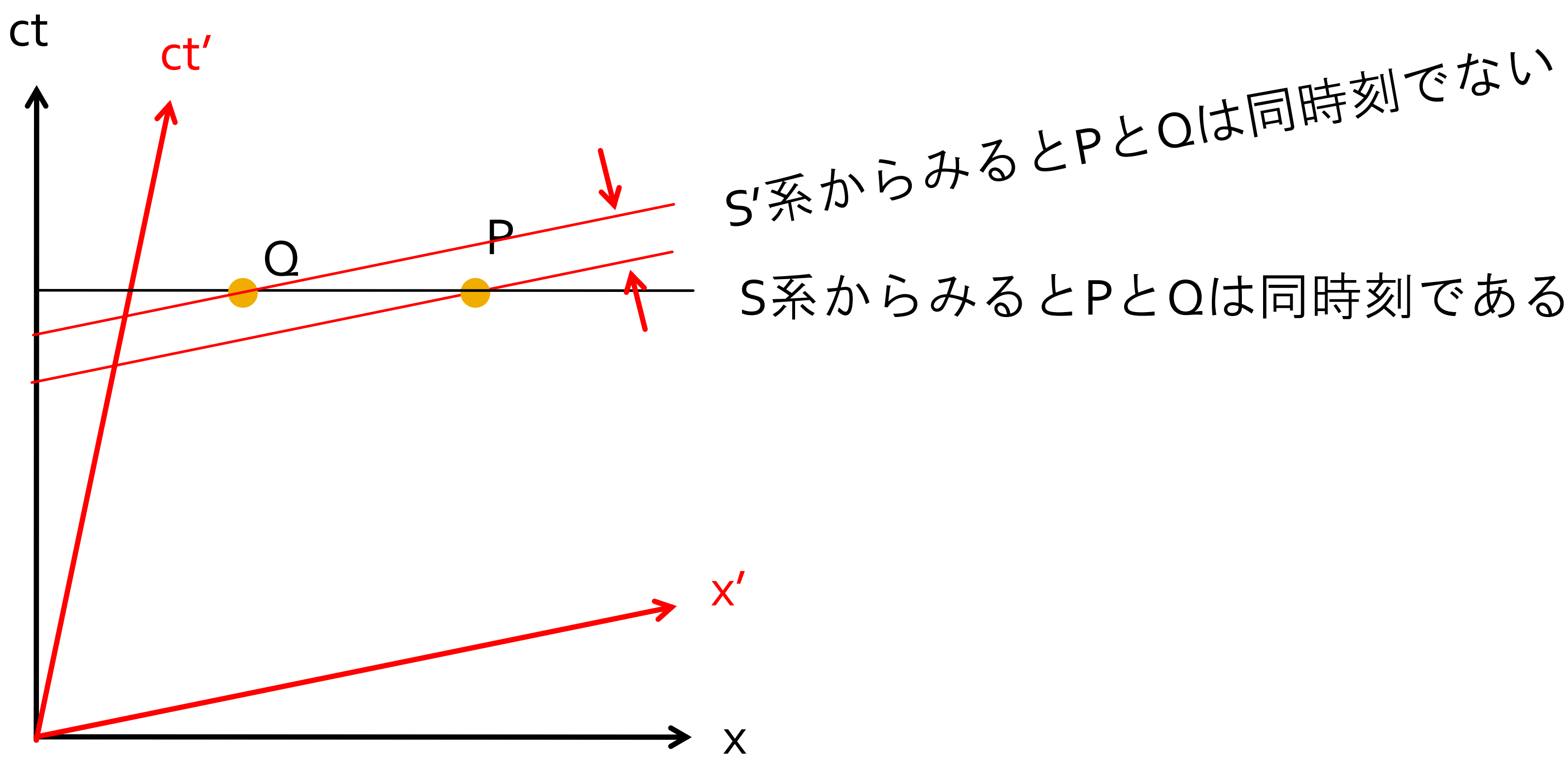




Lorentz変換からの二三の結果

a.同時刻の相対性

各系での同時をみていく。



Lorentz変換からの二三の結果

a. 同時刻の相対性

教科書の図でみると。

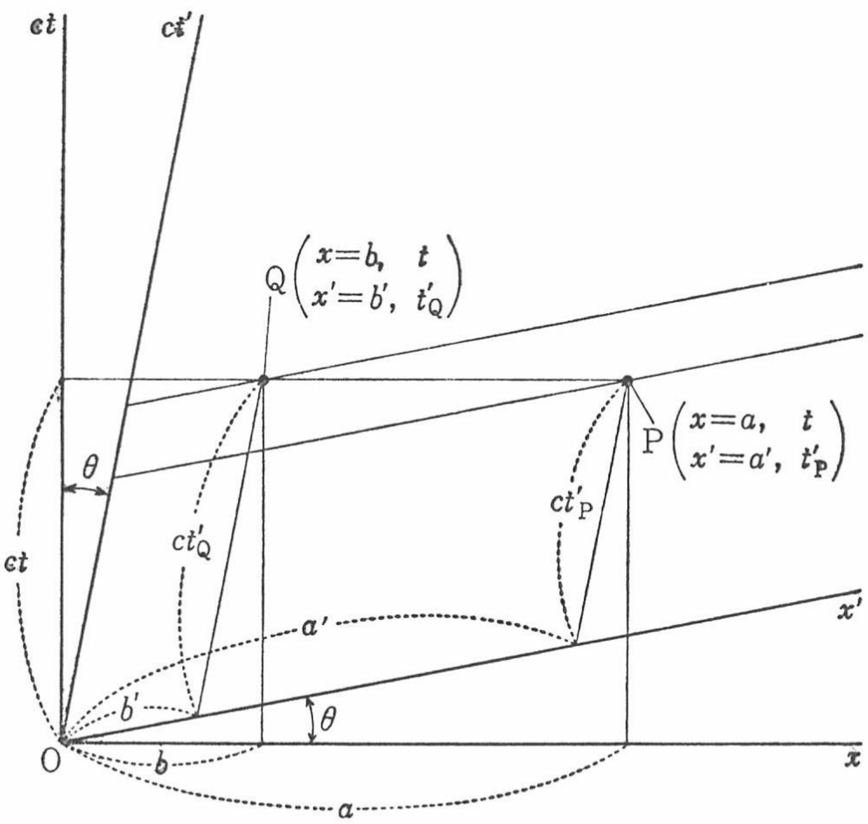


図 3

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.6)$$

Lorentz変換をP,Qに適応すると、

$$ct'_P = \frac{ct - \beta a}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad ct'_Q = \frac{ct - \beta b}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

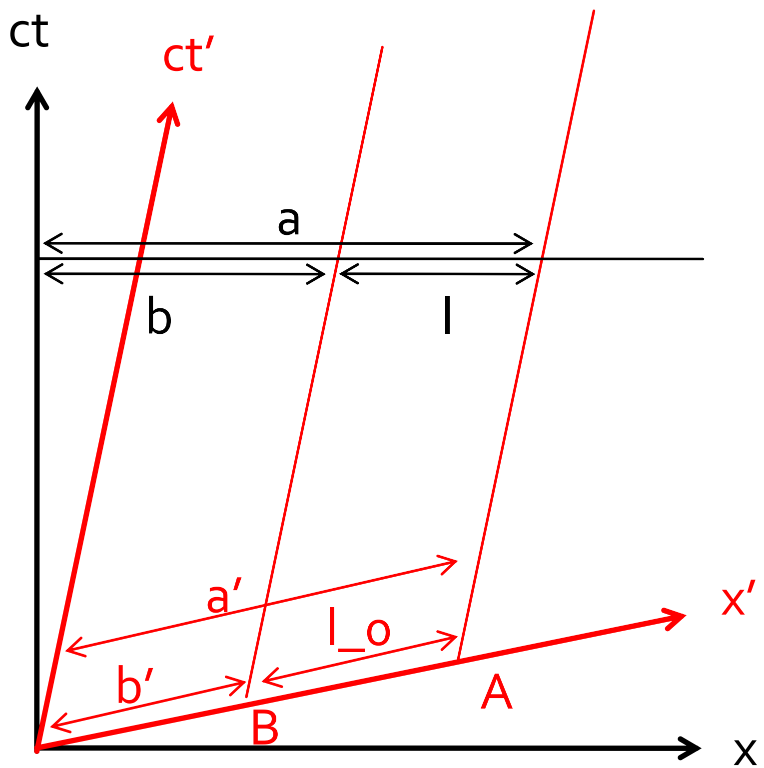
$$\boxed{t'_Q - t'_P = \frac{(a-b)\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}}}$$

S系では同時だが、S′系ではこれだけの時間差が。

Lorentz変換からの二三の結果

b. Lorentz収縮

S′系のx′軸上に静止している点A,Bを考える。
この二点の間の長さはS系からみるとどうなる？



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.6)$$

$$a' = \frac{a - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b' = \frac{b - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$l_0 = a' - b' = \frac{a-b}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

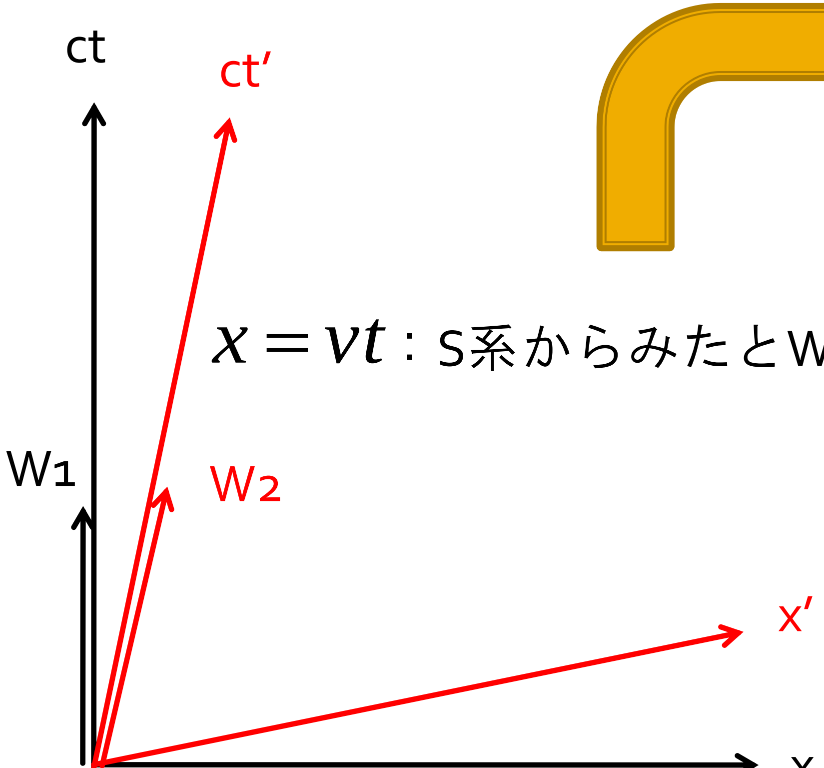
$$l = a - b = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Lorentz収縮:S′系ではloであった
ものがS系でみると縮んでみえる

Lorentz変換からの二三の結果

c. 走っている時計のおくれ

二つの時計W1, W2をそれぞれの系の原点に置き、その進みの違いをみる



$x = vt$: S系からみたとW2のx座標

代入

Lorentz変換

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.6)$$

S系からみたW2の時間は

$$t' = \frac{t - \left(v/c^2\right)vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\sqrt{1-\beta^2} < t \qquad (4.1)$$

S系からみると、S′系の時間は遅れる

Lorentz変換からの二三の結果

c. 走っている時計のおくれ

もし時計W2がx=f(t)に従ってx軸上を運動した場合

$$t' = \frac{t-\left(v/c^2\right)vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\sqrt{1-\beta^2} < t \quad (4.1)$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2} \quad (4.2)$$

$$t' = \int_0^{t'} dt' = \int_0^{t}\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2}\,dt < t \quad (4.2)'$$

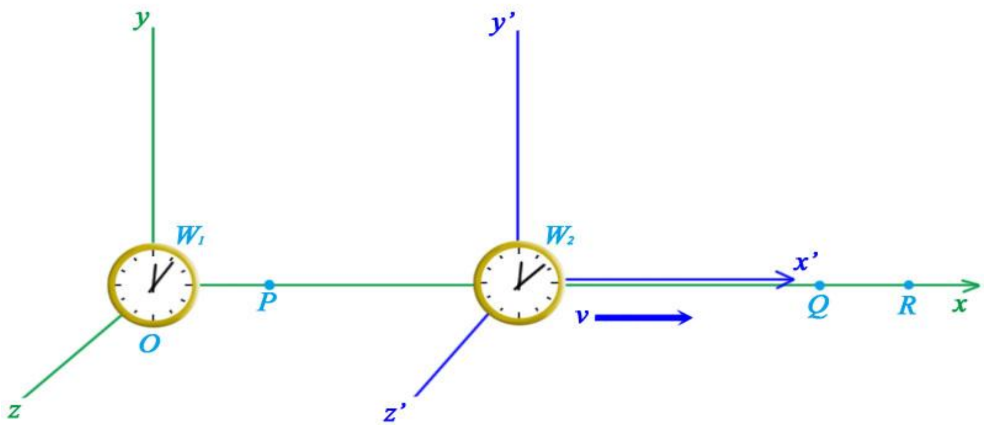
f(t)がどんな関数でも時間は遅れる

Lorentz変換からの二三の結果

d. 時計のパラドックス

W2がRまで行き、Oまで帰ってきたときに時間が遅れているのはどっち？

S系　S′系



$$t' = t\sqrt{1-\beta^2} \quad (4.1)$$

S系にのってW2を見た場合：

$$2T_2 = 2T_1\sqrt{1-\beta^2} < 2T_1 \quad (4.3)$$

横軸：W2の位置

S′系にのってW1を見た場合：

$$2T_1 = 2T_2\sqrt{1-\beta^2} < 2T_2 \quad (4.3)'$$

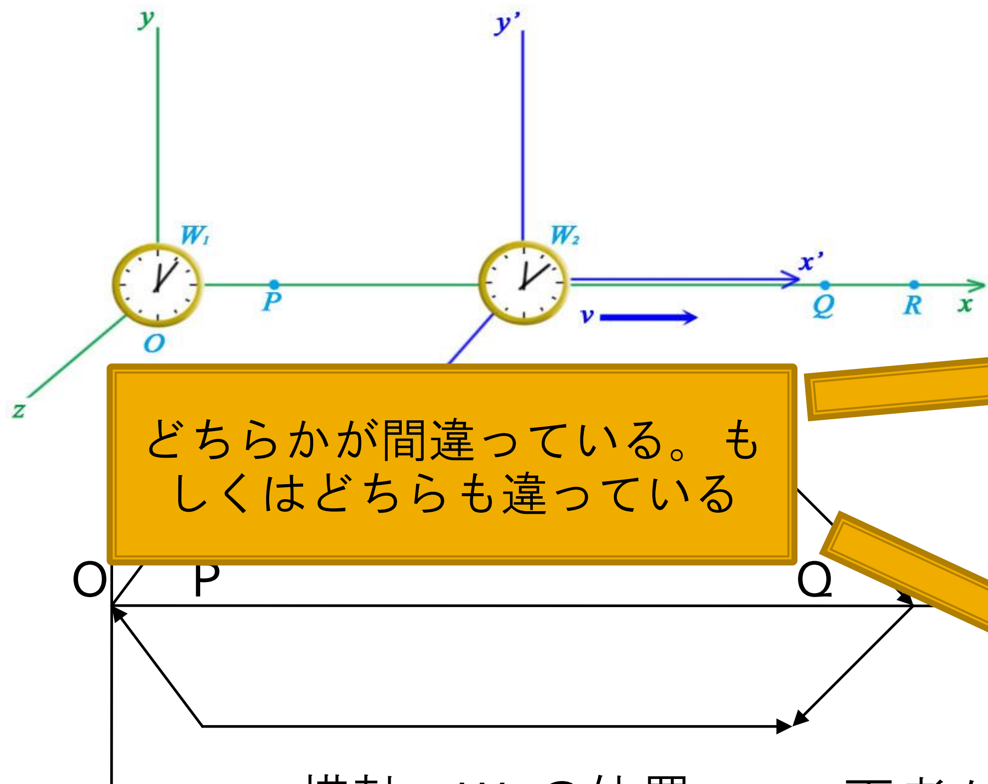
両者が点Oで再会したとき、お互いに相手より自分の時間が進んでいると主張

時計のパラドックス

d. 時計のパラドックス

W2がRまで行き、Oまで帰ってきたときに時間が遅れているのはどっち？

S系　　S′系



横軸：W2の位置

$$t' = t\sqrt{1-\beta^2} \quad (4.1)$$

どちらかが間違っている。もしくはどちらも違っている

S系にのってW2を見た場合：

$$2T_2 = 2T_1\sqrt{1-\beta^2} < 2T_1 \quad (4.3)$$

S′系にのってW1を見た場合：

$$2T_1 = 2T_2\sqrt{1-\beta^2} < 2T_2 \quad (4.3)'$$

両者が点Oで再会したとき、お互いに相手より自分の時間が進んでいると主張

Lorentz変換からの二三の結果

d. 時計のパラドックス

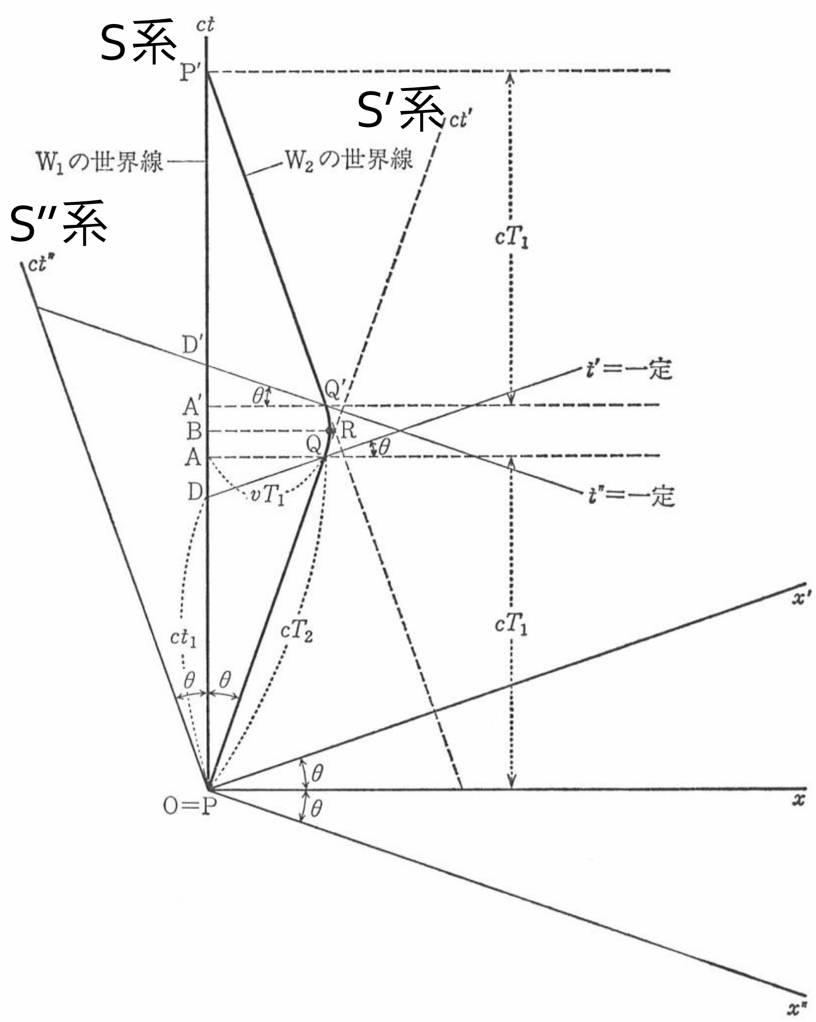


図 6

ミンコフスキー・ダイアグラムでみてみる

点Rでの折り返しに注目する。

点Qにおいて

S′からみると、W1の読みt1は

$$t_1 = T_2\sqrt{1-\beta^2} \quad (4.4)$$

S系は慣性系であるから

$$2T_2 = 2T_1\sqrt{1-\beta^2} < 2T_1 \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = T_1\left(1-\beta^2\right) \quad (4.4)'$$

T1とt1の間には必ず差ができる

W2がS′系からS″系に乗り換えるとき、W1の針はDからD′まで進む

⇒ この部分を数える必要がある

Lorentz変換からの二三の結果

d. 時計のパラドックス

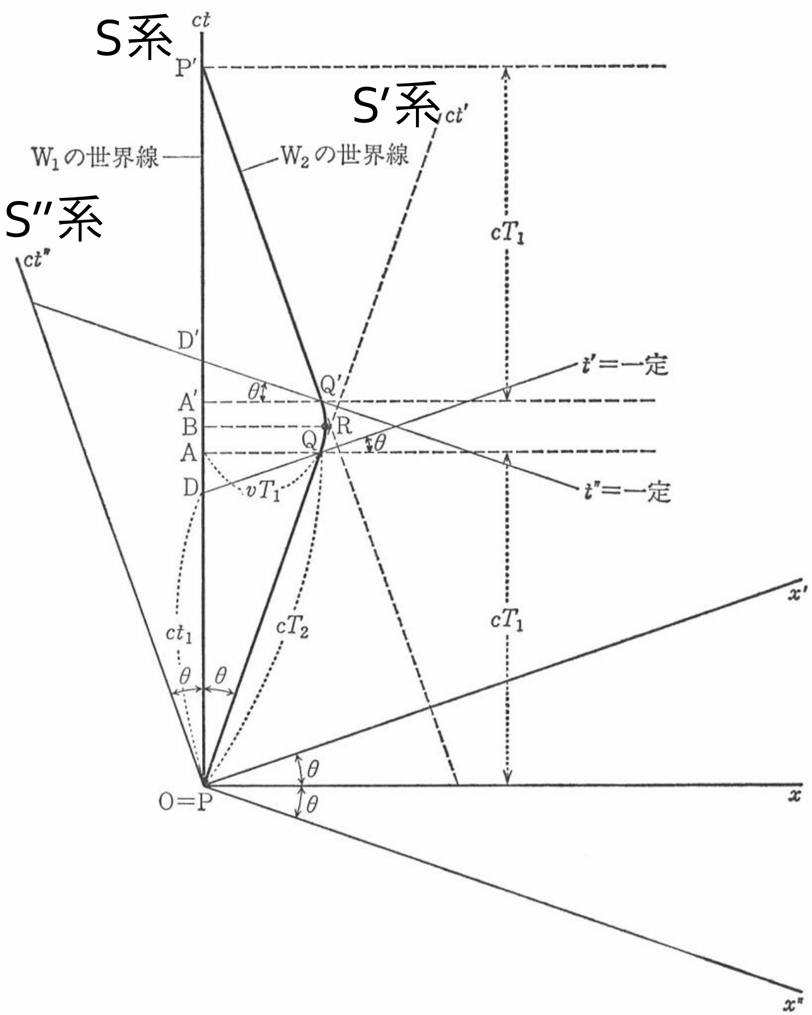


図 6

ミンコフスキー・ダイアグラムでみてみる

点Rでの折り返しに注目する。

W2からみる

W2がQQ′進む間にW1はDD′進む。この時に進む時間は

$$\lim_{QQ'\to 0}\frac{1}{c}DD'=\frac{2}{c}DA=\frac{2}{c}\overset{vT_1}{AQ}\tan\overset{\frac{v}{c}}{\theta}=2\beta^2T_1$$

よってW1の全所要時間は

$$\frac{1}{c}\{OD+DD'+D'P'\}=2T_1\left(1-\beta^2\right)+2\beta^2T_1=2T_1$$

これはW1からみた時間と一致する。

厳密には一般相対論が必要

Lorentz変換からの二三の結果

e. 座標系の設置法

今までの議論の中では、以下のような条件が必要だった。

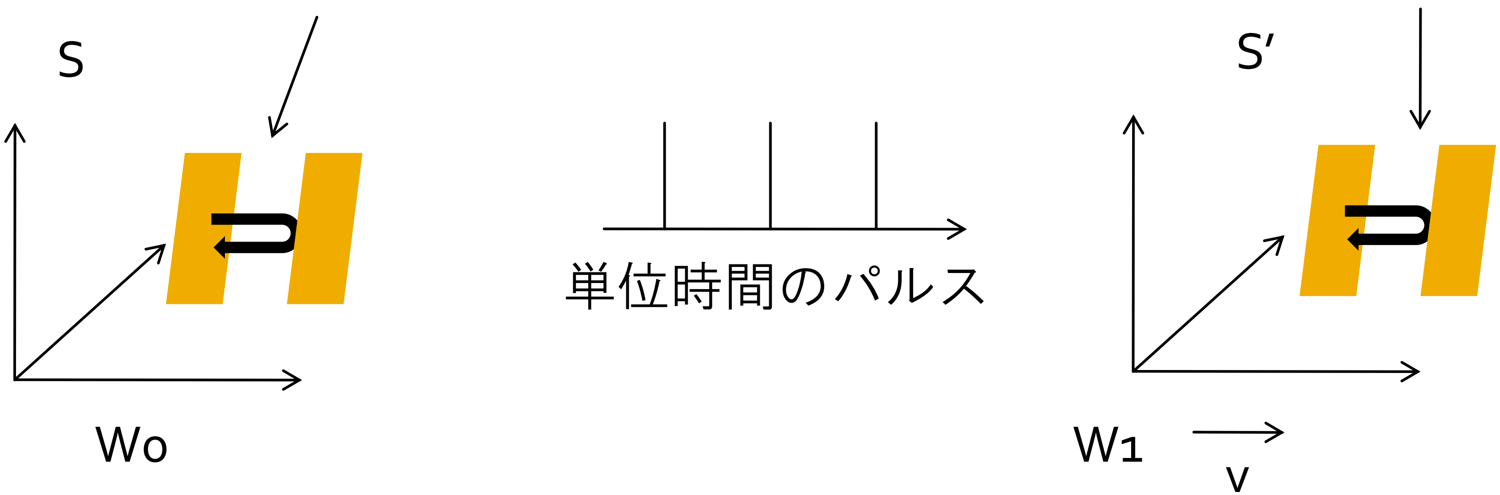
- 各場所に同時刻に調整された時計を設置
- 各場所の空間座標の決定

これを如何に行うか

①単位時間を合わせる

パルスを使って単位時間を合わせる

一往復の時間を単位時間とする



Lorentz変換からの二三の結果

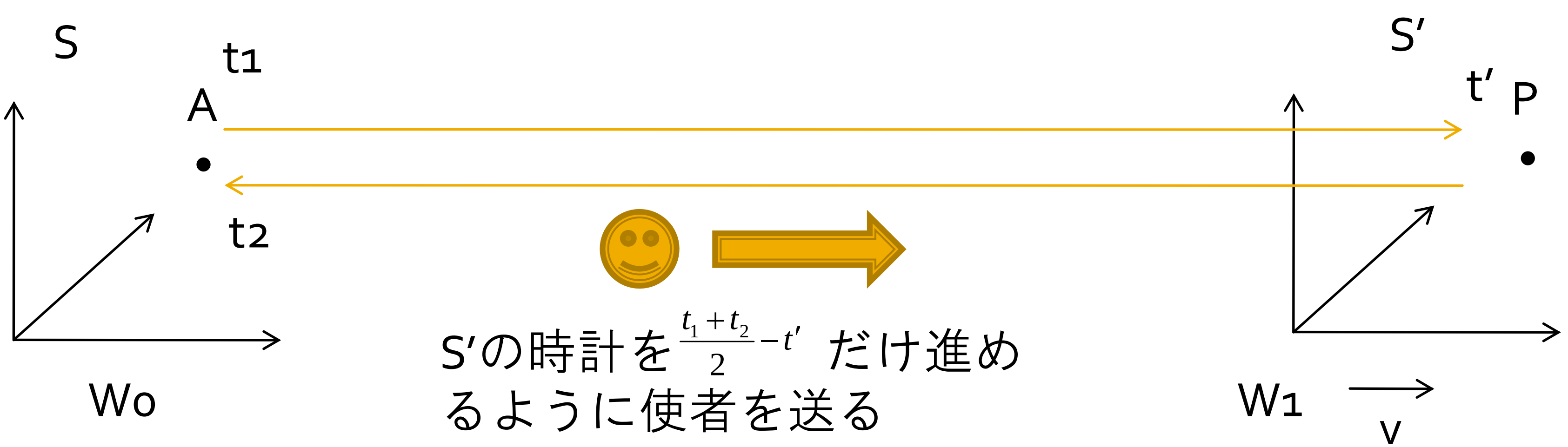
e. 座標系の設置法

今までの議論の中では、以下のような条件が必要だった。

- 各場所に同時刻に調整された時計を設置
- 各場所の空間座標の決定

これを如何に行うか

②時刻を合わせる



S′の時計を$\frac{t_1+t_2}{2}-t'$ だけ進めるように使者を送る

反射の時刻：$\dfrac{t_1+t_2}{2}$

反射の時刻：$t' \longrightarrow \dfrac{t_1+t_2}{2}$

Lorentz変換からの二三の結果

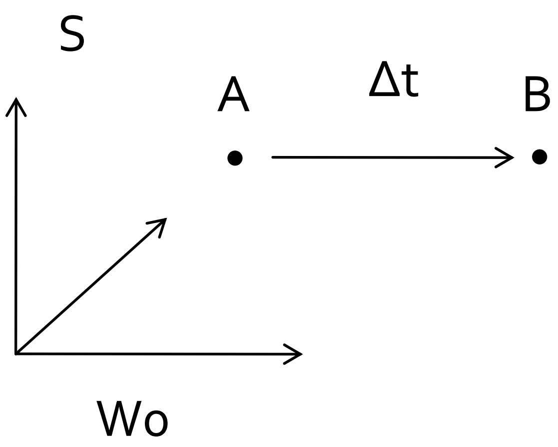
e. 座標系の設置法

今までの議論の中では、以下のような条件が必要だった。

- 各場所に同時刻に調整された時計を設置
- 各場所の空間座標の決定

これを如何に行うか

③二点間の距離



$$AB = \Delta t c$$

Lorentz変換からの二三の結果

e. 座標系の設置法

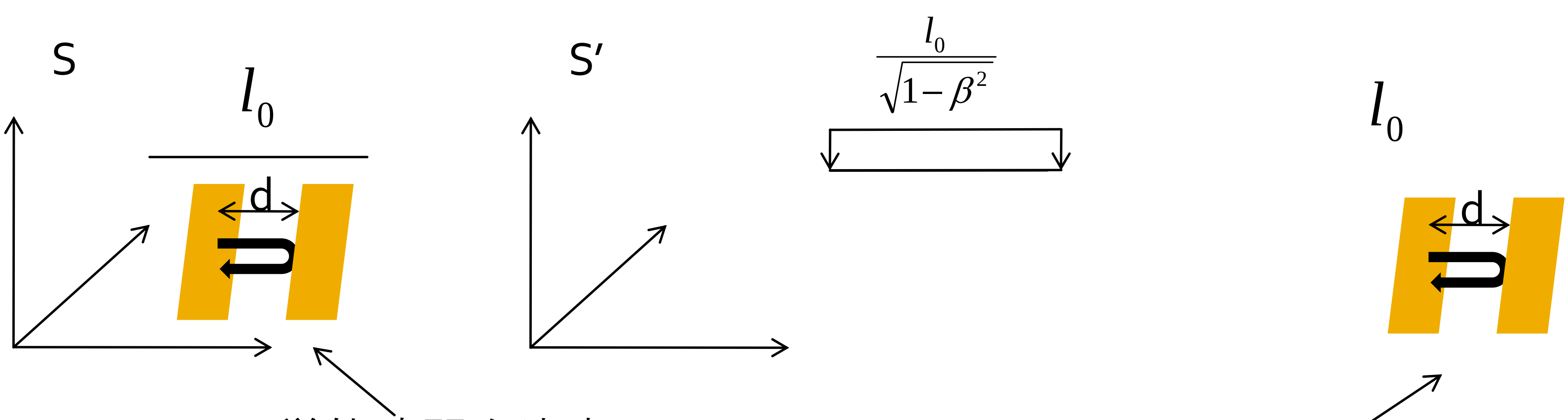
今までの議論の中では、以下のような条件が必要だった。

- 各場所に同時刻に調整された時計を設置
- 各場所の空間座標の決定

これを如何に行うか

④S系とS′系で長さと時間の単位を同値させる

S系からみると、
loになっている



単位時間を決定

単位時間を決定

Lorentz変換からの二三の結果

f. 振動数、波長の変換則

波の一般的な表わし方

振幅がA、振動数がν（にゅー）、波長がλの波は

$$A\sin 2\pi\left(\frac{1}{\lambda}\vec{n}\cdot\vec{x}-\nu t+\alpha\right)$$

で表わされる。

$\vec{n}$：進行方向の単位ベクトル

α：位相（定数）

波の節と腹はS, S′から眺めても変わらない（ある同じ位相の時を考える）

$$\frac{1}{\lambda}\vec{n}\cdot\vec{x}-\nu t=\frac{1}{\lambda'}\vec{n}'\cdot\vec{x}'-\nu't' \quad (4.8) \iff \vec{k}\cdot\vec{x}-\nu t=\vec{k}'\cdot\vec{x}'-\nu't' \quad (4.8)'$$

$\vec{k}$：波数ベクトル

Lorentz変換からの二三の結果

f. 振動数、波長の変換則

振動数、波長にLorentz変換を適応

$$\vec{k}\cdot\vec{x}-\nu t=\vec{k}'\cdot\vec{x}'-\nu' t' \quad (4.8)'$$

代入

$$t'=\frac{t-\left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.6)$$

Lorentz変換を書き直して

$$t=\frac{t'+\left(v/c^2\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (3.6)'$$

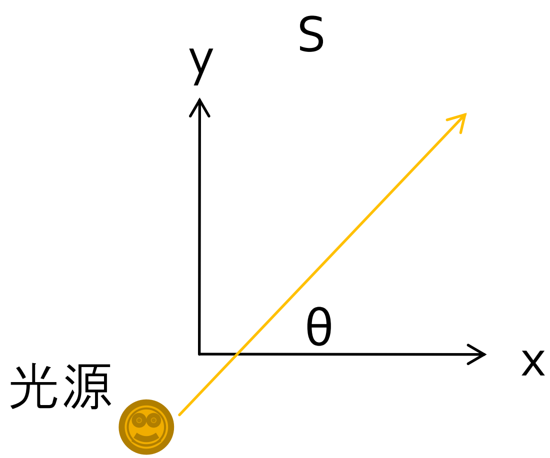
x′とt′の係数の比較

$$\nu'=\frac{\nu-vk_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad k_x{}'=\frac{k_x-\left(v/c^2\right)\nu}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad k_y{}'=k_y,\quad k_z{}'=k_z \quad (4.9)$$

S′系からみると振動数と波数ベクトルはこのように表わされる。
これは一般的な波の場合であるが、光はどうなるか。

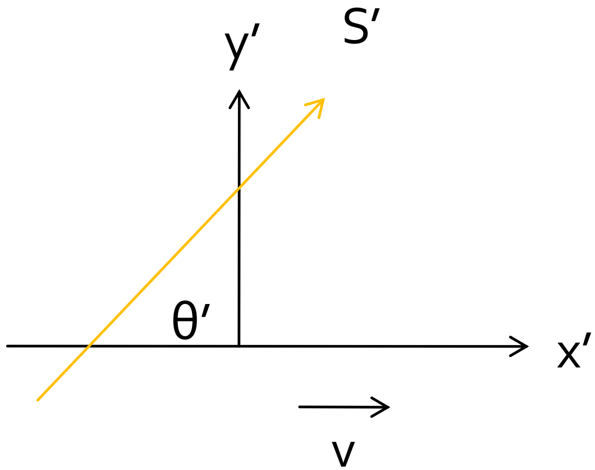
Lorentz変換からの二三の結果

f. 振動数、波長の変換則　　光の場合を考える



$$\nu\lambda = c$$

$$\frac{1}{\lambda} = k$$



xy平面上に進む波を考える：　$k_x = k\cos\theta,\quad k_y = k\cos\theta,\quad k_z = 0$

$$\nu' = \frac{\nu - v k_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad k_x{}' = \frac{k_x - \left(v/c^2\right)\nu}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad k_y{}' = k_y,\quad k_z{}' = k_z \quad (4.9)$$

光の場合

$$\boxed{\nu' = \nu\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}},\quad \nu'\cos\theta' = \nu\frac{\cos\theta-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \nu'\sin\theta' = \nu\sin\theta \quad (4.10)$$

振動数の変化：ドップラー現象（相対論）

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \tan\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

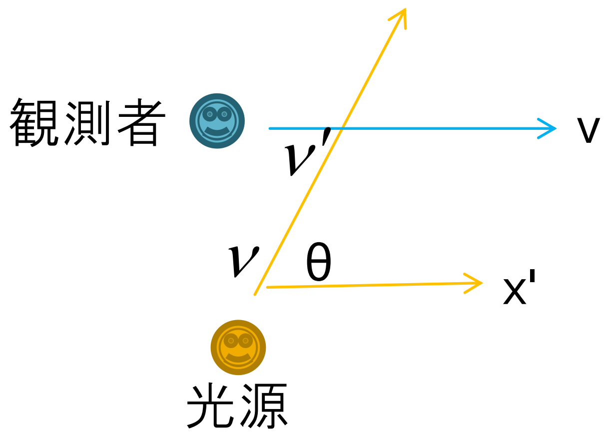
Lorentz変換からの二三の結果

f. 振動数、波長の変換則

ドップラー効果を考える

$$\nu' = \nu \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \nu = \nu' \frac{1+\beta\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

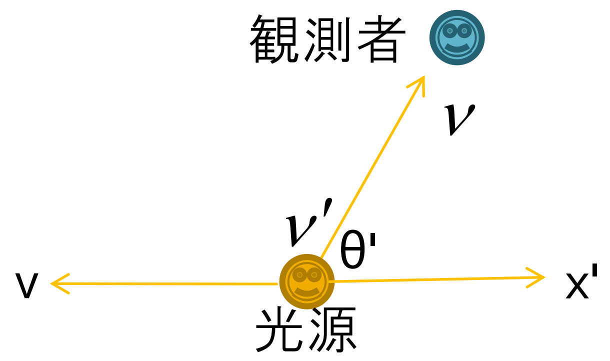
観測者が移動している場合



観測される振動数

$$\nu' = \nu \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

光源が移動している場合



観測される振動数

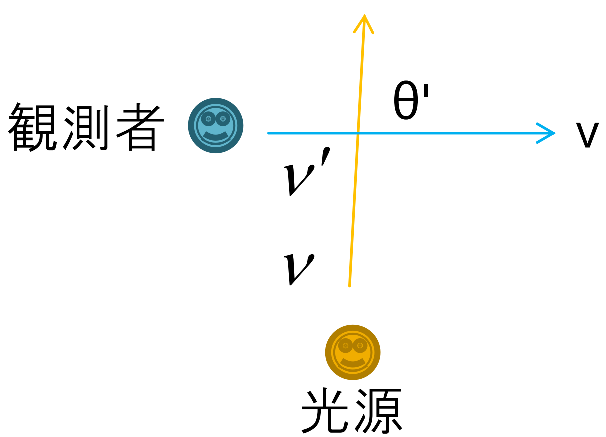
$$\nu = \nu' \frac{1-\beta\cos\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Lorentz変換からの二三の結果

f. 振動数、波長の変換則

横ドップラー効果を考える

$$\nu' = \nu \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \nu'\cos\theta' = \nu \frac{\cos\theta-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \nu'\sin\theta' = \nu\sin\theta \qquad (4.10)$$



$$\theta' = 90^\circ$$

$$\cos\theta = \beta$$

$$\nu' = \nu\sqrt{1-\beta^2}$$

横ドップラー効果

古典論では現れない効果

Lorentz変換からの二三の結果

g. 速度の合成則

S′系からみた質点の運動：$x' = x'(t'),\quad y' = y'(t'),\quad z' = z'(t') \quad (4.11)$

$$u'_x = \frac{dx'(t')}{dt'},\quad u'_y = \frac{dy'(t')}{dt'},\quad u'_z = \frac{dz'(t')}{dt'}$$

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}$$

この運動をS系からみる：$u_x = \frac{dx(t)}{dt},\quad u_y = \frac{dy(t)}{dt},\quad u_z = \frac{dz(t)}{dt}$

$$u = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2}$$

Lorentz変換より：$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad dy = dy',\quad dz = dz',\quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

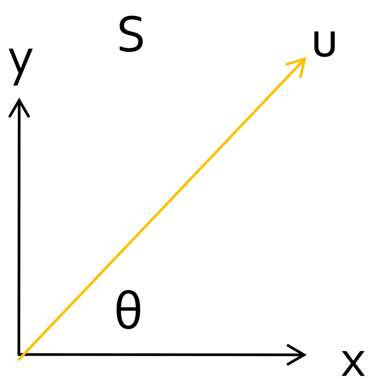
$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x},\quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x},\quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$

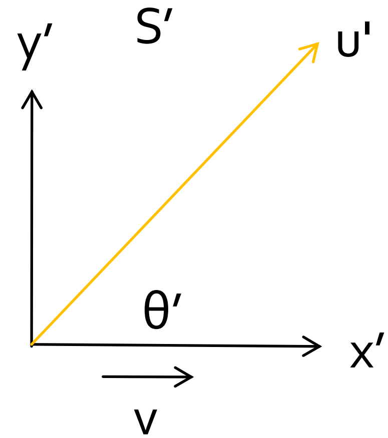
：S系からみた速度成分

Lorentz変換からの二三の結果

g. 速度の合成則

質点の運動がxy平面に限られる時





$$u_x = u\cos\theta,\quad u_y = u\sin\theta,\quad u_z = 0 \qquad u'_x = u'\cos\theta',\quad u'_y = u'\sin\theta',\quad u'_z = 0$$

$$u = \frac{\sqrt{(u')^2 + v^2 + 2u'v\cos\theta' - \left(\frac{v}{c^2}u'\sin\theta'\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'\cos\theta'} \quad (4.13)$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'\cos\theta'} \quad (4.13)'$$

：cが速度の上限

問題

問題1

我妻さんが1mの定規を持って（x軸に平行に）、x軸に沿ってある速度vで走ったとする。走っていない人から見てこの定規が0.5mに見えるようになるには我妻さんはどのくらいの速さで走る必要があるか。そしてそれは我妻さんの体力で可能か。

問題

問題1
我妻さんが1mの定規を持って（x軸に平行に）、x軸に沿ってある速度vで走ったとする。走っていない人から見てこの定規が0.5mに見えるようになるには我妻さんはどのくらいの速さで走る必要があるか。そしてそれは我妻さんの体力で可能か。

回答1
常識的に無理である。
Lorentz収縮はS'系ではloであったものがS系でみるとlに縮んでみえる現象である。

$$l = a - b = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\frac{l_0}{2} = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c \cong 0.87c \cong 2.6 \times 10^8 [m/s]$$

問題

問題2
地球に降ってくるミュー中間子について考える。
ミュー中間子の静止しているときの平均寿命は$T_0=2.21\times 10^{-6}$secである。
この粒子が発生してすぐ、0.9999cの速さになって降ってくる場合、その平均寿命はいくつになるか。

問題

問題2
地球に降ってくるミュー中間子について考える。
ミュー中間子の静止しているときの平均寿命はT0=2.21×10^(-6)secである。
この粒子が発生してすぐ、0.9999cの速さになって降ってくる場合、その平均寿命はいくつになるか。

回答1
走っている粒子は次の割合だけ時間が遅れる。

$$t' = t\sqrt{1-\beta^2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{T_0}{\sqrt{1-\left(\frac{0.9999c}{c}\right)^2}}$$

$$= 1.56 \times 10^{-4} [s]$$

問題

問題3
x軸方向に進行する一次元の光を考える。その光の通り道で水（屈折率n）を置き、水の流速をx軸方向にvとすると、光の速度Vはどのように書き表わされるか。

問題

問題3
x軸方向に進行する一次元の光を考える。その光の通り道で水（屈折率n）を置き、水の流速をx軸方向にvとすると、光の速度Vはどのように書き表わされるか。

ヒント
水中での光の速度はc/nとなる。
速度の合成則は以下である。

$$u=\frac{\sqrt{(u')^2+v^2+2u'v\cos\theta'-\left(\frac{v}{c^2}u'\sin\theta'\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'\cos\theta'} \qquad (4.13)$$

問題

問題3
x軸方向に進行する一次元の光を考える。その光の通り道で水（屈折率n）を置き、水の流速をx軸方向にvとすると、光の速度Vはどのように書き表わされるか。

ヒント
水中での光の速度はc/nとなる。
速度の合成則は以下である。

$$u=\frac{\sqrt{(u')^2+v^2+2u'v\cos\theta'-\left(\frac{v}{c^2}u'\sin\theta'\right)^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'\cos\theta'} \quad (4.13)$$

回答3
今の場合、θ=oから合成則の式は以下のように書き換えられる。

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{1}{c^2}vu'} \qquad V=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{1}{c^2}v\frac{c}{n}}=\frac{c}{n}(1+\beta n)\left(1+\frac{1}{n}\beta\right)^{-1}\cong\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$$

フレネルの仮説を参照